

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE
A L'USAGE DES MARINS.

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE

A L'USAGE DES MARINS

OU

MÉTHODES ET FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AU LEVÉ ET À LA CONSTRUCTION

DES CARTES HYDROGRAPHIQUES

PAR P. BÉGAT

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PUBLIÉ SOUS LE MINISTÈRE

DE M. LE VICE-AMIRAL DUCAMPE DE ROSAMEL

SECRÉTAIRE D'ÉTAT AU DÉPARTEMENT DE LA MARINE ET DES COLONIES



PARIS
IMPRIMERIE ROYALE

M DCCC XXXIX

AVERTISSEMENT.

Je n'ai pas pour but, en publiant ce petit traité, de présenter des idées neuves sur les divers genres d'opérations que nécessite la reconnaissance exacte d'une côte étendue; je me propose seulement de faire connaître aux marins les formules qui sont indispensables pour l'exécution de travaux géodésiques analogues à ceux sur lesquels s'appuient les nouvelles cartes de nos côtes. Je veux leur donner en même temps quelques notions sur les méthodes généralement adoptées par les ingénieurs-hydrographes de la marine, pour lever et construire un plan ou une carte hydrographique.

J'ai cherché, autant que possible, à démontrer, par des considérations géométriques ou analytiques purement élémentaires, les diverses formules dont on fait un usage continuel dans la pratique des opérations géodésiques. Parmi les différents auteurs que j'ai consultés pour me guider dans ce travail, j'ai préféré ceux dont les méthodes se font remarquer par leur

clarté et la facilité de leurs applications; c'est dire de quel secours m'ont été les ouvrages publiés sur ces matières par l'astronome Delambre, par M. Puissant, colonel au corps royal d'état-major, membre de l'académie des sciences, et par M. Francœur, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Paris.

Convaincu que, par la description détaillée des diverses parties d'un instrument, on se forme très-difficilement une idée nette de son ensemble lorsqu'on ne l'a pas sous les yeux, je ne suis point entré dans les détails minutieux que comporte la description complète de ceux dont on fait généralement usage dans les opérations géodésiques. Une personne intelligente qui devra s'en servir saisira promptement leur mécanisme en les examinant avec soin; elle parviendra aisément, j'en suis sûr, à l'aide des principes généraux que je donne, à faire toutes les rectifications nécessaires avant de procéder à la mesure des angles.

Pour éviter au lecteur la peine de recourir aux traités de géométrie, j'ai réuni dans le premier chapitre la plupart des formules relatives, soit à la transformation des lignes trigonométriques, soit à la résolution des triangles plans ou sphériques. Elles sont suivies de quelques autres dont on peut aussi trouver les applications dans plusieurs questions qui se rattachent à la géodésie.

Le chapitre qui traite des différences de niveau renferme les formules dont on a besoin pour calculer

la hauteur absolue d'un point au-dessus du niveau de la mer, au moyen d'observations faites, soit à terre, soit au large. Je me suis étendu sur cette matière parce que jusqu'ici on s'est peu occupé, dans les voyages, de la recherche de cet élément géographique. Dans le deuxième et le onzième, je donne des idées générales sur les méthodes adoptées au dépôt de la marine pour lever et construire un plan hydrographique, dresser la projection d'une carte marine, et y rapporter les détails topographiques ou hydrographiques qui se trouvent sur les divers plans particuliers de constructions. J'entre aussi dans certains détails relativement à la loxodromie, aux projections de différents cercles de la sphère et à celles de leurs azimuts sur une carte réduite. Le dernier est consacré spécialement aux applications des diverses formules démontrées dans les précédents; il doit servir de type de calcul pour tous les cas semblables à ceux qui y sont traités. Les tables qui viennent ensuite sont destinées à abréger les opérations numériques relatives à divers calculs géodésiques.

J'ai pris pour unité de longueur celle du mètre légal, et employé l'aplatissement $\frac{1}{305}$ pour calculer les logarithmes des rayons de courbure du méridien et de la perpendiculaire en fonction de la latitude. On sait qu'il doit être préféré à tout autre quand on considère le globe terrestre tout entier. Enfin j'ai extrait de la collection des tables publiées par Mendoza,

celles des latitudes croissantes que je donne ici; quoique calculées dans l'hypothèse d'un aplatissement égal à $\frac{1}{321}$, elles ne conduiront jamais, dans la pratique, à des résultats différents de ceux qu'on obtiendrait avec celui que j'ai adopté.

On ne trouvera pas dans ce traité l'exposition des diverses méthodes d'observations et de calculs dont on a besoin pour déterminer les latitudes, les longitudes et les azimuts astronomiques. Comme elles sont généralement familières aux marins, j'ai cru pouvoir les passer sous silence. Je regarde d'ailleurs les questions qui se rattachent à la recherche de ces éléments géographiques comme assez nombreuses et assez importantes pour former un ouvrage à part. Les traiter ici, même succinctement, c'eût été sortir du cadre que je me suis tracé pour le moment.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉODÉSIE.



CHAPITRE PREMIER.

FORMULES DIVERSES EMPLOYÉES DANS LA GÉODÉSIE.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

1. Dans toutes les formules suivantes on suppose le rayon des tables égal à l'unité, de sorte que les sinus, cosinus, tangente, etc., ne doivent plus être considérés que comme de simples rapports.

Dans cette hypothèse on a, en désignant par a, b deux arcs quelconques :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$

$$\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a},$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a},$$

$$(1)\quad \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a, \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{cases}$$

1° Si l'on combine ces équations par addition et soustraction, on en tire les suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b, \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a, \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b, \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b. \end{cases}$$

2° En divisant la seconde par la première et la quatrième par la troisième, on trouve :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)} = \dfrac{\text{tang } a - \text{tang } b}{\text{tang } a + \text{tang } b}, \\ \dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\cot a + \text{tang } b}{\cot a - \text{tang } b}. \end{cases}$$

3° Enfin la première divisée par la troisième et la seconde par la quatrième donnent :

$$(4)\quad \begin{cases} \text{tang }(a+b) = \dfrac{\text{tang } a + \text{tang } b}{1 - \text{tang } a \text{ tang } b}, \\ \text{tang }(a-b) = \dfrac{\text{tang } a - \text{tang } b}{1 + \text{tang } a \text{ tang } b}. \end{cases}$$

De l'hypothèse $b=a$ dans ces mêmes équations (1) et dans (4) on déduit :

$$(5)\quad \begin{cases} \sin 2a = 2 \sin a \cos a, \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a, \\ \text{tang } 2a = \dfrac{2 \text{ tang } a}{1 - \text{tang}^2 a}. \end{cases}$$

Changeant dans ces dernières a en $\frac{1}{2}a$, il vient :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\sin a &= 2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a,\\ \cos a &= \cos^2\tfrac{1}{2}a - \sin^2\tfrac{1}{2}a,\\ \operatorname{tang} a &= \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a}.\end{aligned}\right.$$

Combinant maintenant l'avant-dernière de ces formules avec

$$1 = \sin.^2\tfrac{1}{2}a + \cos^2\tfrac{1}{2}a,$$

on trouve :

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}\cos^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{1+\cos a}{2},\\ \sin^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{1-\cos a}{2};\\ &\text{d'où}\\ \cos a &= 1-2\sin^2\tfrac{1}{2}a,\\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{1-\cos a}{1+\cos a}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose actuellement $a = 90° + \alpha$, on aura encore les relations suivantes, en observant que $\operatorname{tang} 45° = 1$:

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{tang}^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha},\\ \operatorname{tang}(45° + \alpha) &= \frac{1+\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}\alpha}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $a+b=p$, $a-b=q$ (p et q désignant deux arcs quelconques), on aura $a = \frac{1}{2}(p+q)$, $b = \frac{1}{2}(p-q)$, et ces valeurs substituées dans les équations (2) fourniront les suivantes qui sont d'un usage fréquent dans le calcul logarithmique, lorsqu'il s'agit de changer une somme ou une différence en un produit :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sin p+\sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),\\
&\sin p-\sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q),\\
&\cos p+\cos q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),\\
&\cos q-\cos p = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\sin\tfrac{1}{2}(p-q);\\
&\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)},\\
&\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p} = \frac{\cot\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)},\\
&\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p+q),\\
&\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-q),\\
&\frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p} = \cot\tfrac{1}{2}(p+q),\\
&\frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p} = \cot\tfrac{1}{2}(p-q).
\end{aligned}\right.
$$

FORMULES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

1° *Triangles rectilignes quelconques.*

2. Lorsque l'on désigne par a, b, c les trois côtés d'un triangle, par A, B, C les angles qui leur sont opposés, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A,$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \left\{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \left\{\frac{s(s-a)}{bc}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Dans ces deux dernières équations $s = \frac{a+b+c}{2}$.)

2° Triangles rectangles.

Lorsqu'on suppose $A = 90°$ dans les équations précédentes, elles deviennent :

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

$$b = a \sin B = a \cos C, \qquad c = a \sin C = a \cos B,$$

$$\operatorname{tang} B = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tang} C = \frac{c}{b}.$$

FORMULES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

1° Triangles sphériques quelconques.

3. Les lettres a, b, c représentent les arcs ; A, B, C désignent les angles qui leur sont opposés.

1° Relation entre les trois côtés et un angle.

$$(A) \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$$

2° Relation entre les trois angles et un côté.

$$(B) \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases}$$

3° Relation entre deux côtés, l'angle qu'ils comprennent et l'angle opposé à l'un d'eux.

$$(C) \begin{cases} \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A, \\ \cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A, \\ \cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B, \\ \cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B, \\ \cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C, \\ \cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C. \end{cases}$$

4° Relation entre deux côtés et les deux angles opposés.

$$\text{(D)}\qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Analogies de Néper.

$$\text{(E)}\quad \left\{ \begin{aligned} \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b) &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b) &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B) &= \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B) &= \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}. \end{aligned} \right.$$

Les formules des trois premières relations s'approprieront au calcul logarithmique au moyen d'un angle auxiliaire déterminé convenablement.

Ainsi, pour transformer en un produit le second membre des équations (A), on posera, par exemple :

$$\sin b \cos A = \frac{\cos b \cos \varphi}{\sin \varphi} = \cos b \cot \varphi$$

et on aura :

$$\text{(A)}\quad \left\{ \begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos b \sin (c+\varphi)}{\sin \varphi},\\ \cot \varphi &= \text{tang}\, b \cos A. \end{aligned} \right.$$

Pour les équations (B) on fera :

$$\sin B \cos a = \frac{\cos B \cos \varphi}{\sin \varphi} = \cos B \cot \varphi,$$

et il viendra :

$$\text{(B)}\quad \left\{ \begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos B \sin (C-\varphi)}{\sin \varphi},\\ \cot \varphi &= \text{tang}\, B \cos a. \end{aligned} \right.$$

Enfin pour transformer le second membre de la relation (C), on écrira :

$$\cot A = \cos b \cot \varphi,$$

et on obtiendra par la substitution :

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} \cot a \operatorname{tang} b &= \frac{\sin (C+\varphi)}{\sin \varphi}, \\ \cot \varphi &= \frac{\cot A}{\cos b}. \end{aligned} \right.$$

Expressions des sinus, cosinus, tangente d'un arc ou d'un angle.

$$(F) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} a &= \left\{ \frac{\sin S \sin (A-S)}{\sin B \sin C} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} a &= \left\{ \frac{\sin (B-S) \sin (C-S)}{\sin B \sin C} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a &= \left\{ \frac{\sin S \sin (A-S)}{\sin (B-S) \sin (C-S)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \sin \tfrac{1}{2} A &= \left\{ \frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} A &= \left\{ \frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A &= \left\{ \frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces diverses équations, les lettres S et s représentent, l'une la demi-somme des trois angles diminuée de 90°, l'autre la demi-somme des trois côtés.

2° *Triangles sphériques rectangles.*

4. Lorsqu'on suppose $A = 90°$ dans les quatre premières relations, elles fournissent celles qui suivent :

1re RELATION. $\cos a = \cos b \cos c.$

$$2^{e} \text{ RELATION.} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos a &= \cot B \cot C, \\ \cos B &= \sin C \cos b, \\ \cos C &= \sin B \cos c. \end{aligned} \right.$$

3° RELATION
$$\begin{cases} \text{tang}\, b = \text{tang}\, a \cos C, \\ \text{tang}\, c = \text{tang}\, a \cos B, \\ \cot B = \cot b \sin c \\ \cot C = \cot c \sin b \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \text{tang}\, b = \text{tang}\, B \sin c, \\ \text{tang}\, c = \text{tang}\, C \sin b. \end{cases}$$

4° RELATION
$$\begin{cases} \sin b = \sin a \sin B, \\ \sin c = \sin a \sin C. \end{cases}$$

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ET LOGARITHMIQUES.

5. Les séries suivantes se déduisent toutes de la formule générale :

$$F(x) = f(o) + f'(o)\frac{x}{1} + f''(o)\frac{x^2}{1.2} + f'''(o)\frac{x^3}{1.2.3} + \text{, etc.}$$

connue en analyse sous le nom de *série de Maclaurin*.

Les expressions $f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$.... représentent ce que deviennent les coefficients différentiels $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df'(x)}{dx}$, $\frac{df''(x)}{dx}$...... lorsqu'on y fait $x = o$.

Cela posé, si l'on désigne par x un très-petit arc exprimé en parties du rayon toujours supposé égal à l'unité, et qu'on calcule la valeur des coefficients différentiels des divers ordres qui correspondent aux fonctions $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(y) = \text{arc} \sin y$, y désignant le sinus de l'arc x, on aura les séries suivantes (A') en se rappelant que

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x,\quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$\frac{d\, \text{tang}\, x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d\, \text{arc} \sin y}{dy} = (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{d\, \text{arc tang}\, z}{dz} = (1 + z^2)^{-1},$$

et que généralement

$$d\,(a+x^n)^m = m\,n\,(a+x^n)^{m-1}\,x^{n-1}\,d\,x:$$

$$(\text{A}')\left\{\begin{array}{l}
\sin x = x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.},\\[2mm]
\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},\\[2mm]
\text{tang}\, x = x + \dfrac{x^3}{1.3} + \dfrac{2x^5}{1.3.5} + \text{etc.},\\[2mm]
\text{arc}\, x = \sin x + \dfrac{\sin^3 x}{2.3} + \dfrac{3\sin^5 x}{2.4.5} + \text{etc.},\\[2mm]
\text{arc}\, x = \text{tang}\, x - \dfrac{\text{tang}^3 x}{3} + \dfrac{\text{tang}^5 x}{5} - \text{etc.}
\end{array}\right.$$

6. Si l'arc x est donné en degrés, minutes ou secondes, il faudra le réduire préalablement en parties du rayon, afin de pouvoir l'introduire dans ces diverses formules. Pour faire ces transformations il faut connaître le nombre de degrés, minutes ou secondes que comprendrait le rayon R d'un cercle, si on le couchait sur la circonférence. Or puisque $2\pi R = 360°$, on aura, en représentant par $R°$, R', R'', sa longueur en degrés, minutes ou secondes :

$$R° = \frac{180°}{\pi},$$

$$R' = \frac{10800'}{\pi} = \frac{1}{\frac{\pi}{10800}} = \frac{1}{\text{arc } 1'} = \frac{1}{\sin 1'},$$

$$R'' = \frac{648000''}{\pi} = \frac{1}{\frac{\pi}{648000}} = \frac{1}{\text{arc } 1''} = \frac{1}{\sin 1''},$$

parce que arc $1' = \sin 1'$, arc $1'' = \sin 1''$ à fort peu près; pour ce dernier cas la différence ne se fait sentir qu'à la dix-septième décimale.

Ainsi un arc exprimé en parties du rayon sera converti en secondes en le divisant par $\sin 1''$, et réciproquement un arc

exprimé en secondes sera converti en parties du rayon en le multipliant par $\sin 1''$.

Le nombre constant π, qui représente le rapport de la circonférence au diamètre, a pour valeur $\pi = 3{,}14159265..$
et pour logarithme.......... $\log \pi = 0{,}49714987..$

D'après cela on a pour les logarithmes de R°, R', R'':

$$\log R^\circ = 1{,}758122632....$$
$$\log R' = 3{,}536273883....$$
$$\log R'' = 5{,}314425133....$$

7. Les logarithmes *hyperboliques* ou *népériens* des quantités de la forme $1+x$, $1-x$, s'expriment aussi en séries au moyen de la formule ci-dessus, en y remplaçant successivement $f(x)$ par $\text{Log}(1+x)$, $\text{Log}(1-x)$, et observant que généralement

$$\frac{d\,\text{Log}\,(a \pm x)}{dx} = \pm \frac{1}{a \pm x}.$$

Nous désignons ici par l'indice Log les logarithmes népériens; l'indice log représentera les logarithmes vulgaires.

Si l'on effectue les diverses opérations que nous venons d'indiquer, on trouvera :

$$(\text{B}')\quad \begin{cases} \text{Log}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}, \\ \text{Log}\,(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{etc.}, \\ \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right). \end{cases}$$

De cette dernière relation on tire, en posant $x = \frac{m-n}{m+n}$:

$$(\text{C}')\quad \text{Log}\,\frac{m}{n} = 2\left\{\left(\frac{m-n}{m+n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

Mais on sait qu'en général

$$\textit{log vulgaire d'un nombre} = \begin{cases} \dfrac{\textit{Log népérien de ce nombre}}{\textit{Log népérien de } 10}, \\ \text{ou} \\ \textit{Log népérien de ce nombre} \times \text{M}; \end{cases}$$

par conséquent les logarithmes vulgaires des expressions précédentes seront donnés par les équations suivantes, dans lesquelles le module M a pour valeur :

$$\text{M} = 0{,}4342945..........$$

et pour logarithme

$$\log \text{M} = 9{,}6377843113.... :$$

$$(\text{D}')\begin{cases} \log(1+x) = \text{M}\,\text{Log}(1+x) = \text{M}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}....\right) \\ \log(1-x) = \text{M}\,\text{Log}(1-x) = -\text{M}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}....\right) \\ \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{M}\,\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\text{M}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...\right) \\ \log\frac{m}{n} = \text{M}\,\text{Log}\frac{m}{n} = 2\,\text{M}\left\{\left(\frac{m-n}{m+n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + ...\right\} \end{cases}$$

Si on prend les logarithmes de chacun des membres des équations (A') qui donnent la valeur du sinus et du cosinus en fonction de l'arc, on aura :

$$\log\sin x = \log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \text{etc.}\right),$$

$$\log\cos x = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \text{etc.}\right);$$

mais puisque

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) = \text{Log}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) \times \text{M},$$

$$\text{et}\quad \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = \text{Log}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \times \text{M},$$

on pourra remplacer chacun des facteurs Log par sa valeur

en série, au moyen de la deuxième des équations (B') où l'on mettra successivement, au lieu de x :

$$-\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}\right),\ -\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right);$$

on aura alors, après les réductions :

$$\log \sin x = \log x - M\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{180}+\frac{x^6}{2835}\right),$$

$$\log \cos x = \quad - M\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}\right).$$

CONVERSION DES NOUVELLES MESURES CIRCULAIRES ET LINÉAIRES EN ANCIENNES, ET RÉCIPROQUEMENT.

8. D'après la nouvelle division de la circonférence, 400 *grades* valent 360° *degrés sexagésimaux;* par conséquent,

$$1 \text{ degré} = \tfrac{9}{10} \text{ de grade} = 1 \text{ grade} - \tfrac{1}{10} \text{ de grade},$$

et $1 \text{ grade} = \tfrac{10}{9}$ de degré $= 1$ degré $+ \tfrac{1}{9}$ de degré.

Ainsi, pour convertir en degrés et fraction décimale de degré un arc exprimé en grades, il faudra en retrancher le dixième; on convertira ensuite sa partie décimale en minutes et fraction décimale de minute en la multipliant par 60; en opérant de même sur la partie décimale du reste, on aura les secondes et fractions de seconde.

Réciproquement, pour convertir en grades un arc exprimé en degrés, minutes et secondes, on transformera d'abord ses secondes en fractions décimales de minute en les divisant par 60, puis ses minute en décimales de degré en les divisant par 60; ensuite, au nombre ainsi obtenu, on ajoutera son neuvième; le résultat exprimera des grades.

EXEMPLES :

$$
\begin{array}{rr}
 & 125^{gr},48762 \\
 & 12,\ 548762 \\
\hline
 & 112^{\circ},938858 \\
0^{\circ},938858 \times 60' = & 56',33148 \\
0',33148 \times 60'' = & 19'',8888 \\
\hline
\end{array}
$$

Angle converti en degrés........... 112°—56′—19″,8888

$\frac{19'',8888}{60} = 0',33148..$ 112°—56′,33148

$\frac{56',33148}{60} = 0^{\circ},938858$ 112°,938858

$\frac{112^{\circ},938858}{9} =$ 12, 548762

Angle converti en grades........... 125gr,487620

Logarithmes constants et additifs pour convertir	le mètre en toises.	9,71018001
	la toise en mètres.	0,28981999
	le grade en degrés.	9,95423251
	le degré en grades.	0,04576749

DIMENSIONS DU SPHÉROÏDE TERRESTRE DANS L'HYPOTHÈSE D'UN APLATISSEMENT ÉGAL À $\frac{1}{305}$ ET EN PRENANT POUR LONGUEUR DU MÈTRE LA VALEUR 443lignes,296 (CHAPITRE IX).

	MÈTRES.	TOISES.
9. Rayon de l'équateur, ou demi-grand axe de l'ellipse du méridien.................	6,377,116	3,271,933
Distance du pôle au centre de la terre, ou demi-petit axe de l'ellipse du méridien......	6,356,207	3,261,205
Rayon de la terre, ou distance du centre au parallèle de 45°.	6,366,698	3,266,588

	MÈTRES.	TOISES.
Longueur du quart du méridien	10,000,735	5,131,117
Longueur du degré moyen du méridien..............	111,137,25	57,021,63
Longueur de la minute de l'équateur................	1,855,03	951,77

Mesures déduites de la valeur précédente du rayon moyen de la terre.

	MÈTRES.	TOISES.
10. Lieue terrestre = $\frac{1}{25}$ de degré.	4,444,79	2,280,50
Lieue marine = $\frac{1}{20}$ de degré = 3 minutes du méridien..	5,555,99	2,850,63
Mille marin = $\frac{1}{3}$ de lieue marine = 1 minute du méridien..	1,852,00	950,21
Nœud = $\frac{1}{120}$ de mille marin = 47^{pieds},51............	15,43	7,92
Brasse = 5 pieds..........	1,62	0,83
Encablure =..............	194,90	100,00

Si l'on partait de la longueur du degré moyen du méridien, on trouverait :

	MÈTRES.	TOISES.
Lieue terrestre de 25 au degré.	4,445,49	2,280,86
Lieue marine de 20 au degré.	5,556,86	2,851,08
Mille marin..............	1,852,29	950,36

	LIEUES de 25 au degré.
Rayon de l'équateur	1,434,5
Distance du pôle au centre de la terre	1,429,8
Rayon moyen de la terre	1,432,2
Quart du méridien	2,249,6

Conversion des lieues marines en arcs de grands cercles, et réciproquement des arcs de grands cercles en lieues marines.

11. Si l'on veut exprimer en arc un nombre L de lieues marines, on observera que

$$\frac{L}{20} = D^{\circ} + l \text{ lieues} = D^{\circ} + l \times 3',$$

puisque 1 lieue marine $= 3'$.

Ainsi, pour convertir en degrés et minutes des lieues marines, on prendra le vingtième du nombre qui les exprime, et on multipliera par trois le reste de la division : la première opération fera connaître les degrés, la seconde les minutes.

Réciproquement, si l'on multiplie par vingt les degrés, et qu'on prenne le tiers des minutes d'un arc de grand cercle composé de degrés et de minutes, on aura, en ajoutant ces deux sommes, sa valeur en lieues marines.

MESURES AGRAIRES.

12. L'hectare ou l'arpent métrique est un carré de cent mètres de côté, qui comprend par conséquent 10,000 mètres carrés; il vaut 2^{arpents},9249 dont chacun représente un carré de trente toises de côté.

L'are vaut 100 mètres carrés.

Le centiare représente une surface d'un mètre carré seulement.

EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES DIVERSES SURFACES ET VOLUMES.

1° *Surfaces.*

13. Triangle en fonction
- de sa base et de sa hauteur...... $\frac{bh}{2}$.
- de deux côtés et de l'angle qu'ils comprennent.............. $\frac{ab \sin C}{2}$.
- de ses trois côtés... $\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$.

h représente la hauteur, a, b, c les trois côtés et C l'angle compris entre les deux premiers; de plus $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Parallélogramme en fonction
- de sa base et de sa hauteur..... bh.
- de deux côtés et de l'angle qu'ils comprennent............. $ab \sin C$.
- de deux côtés et de la diagonale qui leur correspond.... $2\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$.

C représente l'angle compris entre les deux côtés adjacents a, b; c est la longueur de la diagonale opposée à cet angle et $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Trapèze en fonction
- de ses deux bases parallèles et de sa hauteur................ $\frac{B+b}{2}h$.
- de ses deux bases parallèles, d'un des côtés obliques et de l'angle compris entre l'une d'elles et ce côté $\frac{B+b}{2} l \sin C$.

h est la distance des bases parallèles B, b; l la longueur d'un

des côtés obliques et C l'angle compris entre l'une des bases et ce côté.

Quadrilatère quelconque = la moitié du produit de ses deux diagonales multiplié par le sinus de l'angle qu'elles comprennent.

Polygone régulier.................... $= \dfrac{n\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\tang \frac{180^\circ}{n}}$.

n désigne le nombre des côtés, a la longueur de l'un d'eux.

Rayon du cercle inscrit................ $= \dfrac{\frac{a}{2}}{\tang \frac{180^\circ}{n}}$.

Rayon du cercle circonscrit............ $= \dfrac{\frac{a}{2}}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$.

Cercle .... $= \pi R^2$.

Ellipse .... $= \pi a b$.

a et b sont les demi-axes.

Cylindre droit, non compris les bases...... $= 2\pi R H$.

Sphère.......................... $= 4\pi R^2$.

Zone...... $= 4\pi R^2 \sin \frac{1}{2}(H'-H) \cos \frac{1}{2}(H'+H)$.

Quadrilatère sphérique, formé par deux parallèles et deux méridiens $= \frac{\pi}{90}(P'-P) R^2 \sin \frac{1}{2}(H'-H) \cos \frac{1}{2}(H'+H)$.

R désigne le rayon du cylindre ou de la sphère; H, H' sont les latitudes des bases de la zone, et P, P' les longitudes des méridiens extrêmes du quadrilatère. Dans

les applications, il faudra faire attention à la position de H et H' par rapport à l'équateur.

On pourra prendre pour la valeur de R la longueur de la grande normale au point qui correspond à la latitude moyenne $\frac{1}{2}(H + H')$ de la zone ou du quadrilatère. Les tables V font connaître son logarithme.

Cône droit.......................... $= \pi R L$.

Tronc de cône à bases parallèles...... $= \pi\, l\, (R + r)$.

R et r représentent les rayons des bases de ces solides, L et l les longueurs de leurs génératrices.

2° *Volumes.*

14. Prisme.......................... $= BH$.

B exprime la surface de la base et H la hauteur du solide.

Parallélipipède rectangle................ $= p \times q \times r$.

Cube.............................. $= p^3$.

p, q, r sont les longueurs des trois arêtes contiguës.

Pyramide.......................... $= \frac{BH}{3}$.

Pyramide régulière........ $= \frac{B}{3}\left\{(L + R)(L - R)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Dans cette équation,

$$B = \frac{n\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\tang \frac{180}{n}},\ R = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin \frac{180}{n}}.$$

Tronc de pyramide à bases parallèles $= \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb})\, h$.

Tronc de pyramide régulière $\Big\}= \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb})\left\{\left(l + (R - r)\right)\left(l - (R - r)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

$$B = \frac{n\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\text{tang}\,\frac{180}{n}}, \qquad b = \frac{n\left(\frac{a'}{2}\right)^2}{\text{tang}\,\frac{180}{n}},$$

$$R = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\frac{180}{n}}, \qquad r = \frac{\left(\frac{a'}{2}\right)}{\sin\frac{180}{n}}.$$

Dans ces diverses formules n représente le nombre des faces de la pyramide ou du tronc, R, r les rayons des cercles circonscrits aux polygones des bases, a, a' les longueurs des côtés de ces polygones; enfin L et l sont celles de l'arête de la pyramide et de l'arête du tronc.

Cylindre droit........................ $= \pi R^2 H$.

Cône droit.... $= \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi}{3} R^2 \left\{(L+R)(L-R)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Tronc de cône droit

$$= \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\,h,$$

ou bien

$$= \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\left\{\big(l + (R-r)\big)\big(l - (R-r)\big)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

H, h sont les hauteurs de ces différents corps, L, l les longueurs de leurs génératrices, R et r les rayons de leurs bases.

Sphère.............................. $= \frac{4}{3}\pi R^3$.

CHAPITRE II.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE GÉODÉSIE. — CONSIDÉRATIONS SUCCINCTES SUR LE LEVÉ ET LA CONSTRUCTION DES PLANS HYDROGRAPHIQUES.

TRIANGULATION.

15. Lorsqu'on veut lever avec exactitude la carte d'une côte étendue, il est indispensable de la couvrir, à l'aide de signaux et des points remarquables qu'elle présente, d'une suite de triangles dont l'enchaînement forme un réseau continu, figure 22.

Ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses, lorsqu'ils approchent, autant que les circonstances locales le permettent, de la forme équilatérale. Les petites erreurs commises dans la mesure des angles ont alors la plus faible influence possible sur la longueur des côtés. Ils doivent aussi être liés à une *base* mesurée exactement et s'agrandir peu à peu à mesure qu'ils s'en éloignent. On fera bien de ne pas employer souvent des côtés plus grands que 25 ou 30,000 mètres, à cause de la difficulté qu'on a d'apercevoir avec netteté les signaux placés à leurs extrémités lorsque l'atmosphère est chargée de vapeurs, ce qui arrive assez communément dans le voisinage de certaines côtes. Il faudra aussi n'admettre que très-rarement, dans une triangulation du premier ordre, des angles inférieurs à 30° ou supérieurs

à 120, surtout s'ils doivent être opposés à la base du triangle. On conçoit qu'une légère erreur commise dans la mesure de chacun des deux autres en donnera une d'autant plus grande sur la position du sommet, que l'angle en ce point sera plus aigu, ou plus obtus.

16.* Les considérations analytiques suivantes vont éclaircir les principes que nous venons d'énoncer.

Dans un triangle dont A, B, C sont les angles, a, b, c les côtés opposés, on a, en supposant que b soit la base connue :

$$a = b\,\frac{\sin A}{\sin B}, \qquad c = b\,\frac{\sin C}{\sin B}.$$

Si l'on désigne par dA, dB, dC les excès en plus ou en moins des angles observés sur les angles réels, on aura par la différentiation des équations précédentes, pour les erreurs qui correspondent aux côtés a, c, en supposant $dB = \pm dA$, $dB = \pm dC$:

$$da = b\,dA\,\frac{\sin(B \mp A)}{\sin^2 B}, \qquad dc = b\,dC\,\frac{\sin(B \mp C)}{\sin^2 B};$$

ou en remplaçant b par ses valeurs $a\,\frac{\sin B}{\sin A}$, $c\,\frac{\sin B}{\sin C}$:

$$da = a\,dA\,\frac{\sin(B \mp A)}{\sin A \sin B}, \qquad dc = a\,dC\,\frac{\sin(B \mp C)}{\sin C \sin B}.$$

Cela posé, lorsque B=A et B=C, il vient, selon que les erreurs dB, dA, et dB, dC sont dans le même sens ou en sens contraires :

$$\left.\begin{array}{l} da = o \\ dc = o \end{array}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{array}{l} da = 2a\,dA \cot A, \\ dc = 2a\,dC \cot C. \end{array}\right.$$

Dans le premier cas le calcul fait connaître avec exacti-

tude la valeur des côtés a, c, quoiqu'on soit parti de données fautives; dans le second, les hypothèses $B = A$, $B = C$ rendent un minimum chacun des facteurs $\frac{\sin(B+A)}{\sin A \sin B}$, $\frac{\sin(B+C)}{\sin C \sin B}$, qui, en vertu de la quatrième des équations (2) de la page 6 et des relations $B + A = 180 - C$, $B + C = 180° - A$, sont égaux à

$$\frac{2 \sin C}{\cos(A-B) + \cos C}, \qquad \frac{2 \sin A}{\cos(C-B) + \cos A}.$$

Il importe donc, pour affaiblir les erreurs sur la longueur des côtés, que le triangle soit équilatéral; mais, comme cette condition est presque impossible à remplir, on se contente de satisfaire à celle que nous avons indiquée.

17. Les signaux qu'on emploie sont généralement formés d'une poutrelle de 7 à 8 mètres de hauteur, sur deux des faces adjacentes de laquelle sont clouées des planches longues de 2 mètres (figure 2). Le sommet est maintenu dans la verticale du pied au moyen de haubans. On leur donne aussi quelquefois, lorsqu'ils doivent être aperçus de très-loin, la forme d'une pyramide quadrangulaire dont la hauteur est environ le triple de la base. En général, il faut toujours que leurs formes soient régulières, afin qu'on n'ait point d'incertitude sur leurs sommets dans l'observation des angles.

On les peint en noir ou en blanc, selon que des stations d'où on veut les relever ils se projettent sur le ciel ou sur la terre. S'il était nécessaire de ne point avoir d'incertitude à cet égard, on prendrait en B (figure 3), où l'on veut placer le signal, la distance zénithale zBA du point A duquel il

doit être vu, ainsi que celle du point opposé de l'horizon. Suivant que la somme des deux angles $zBA + zBC$ sera plus petite ou plus grande que 180°, le signal placé en B sera projeté sur la terre ou sur le ciel lorsqu'on l'observera du point A. Quand cette somme ne dépassera deux angles droits que de quelques minutes, on pourra encore le voir dans le ciel à cause de la réfraction qui l'élèvera un peu. Dans tous les cas il sera bon de blanchir les planches les plus basses de chaque signal, ainsi que les jambes de force de ceux auxquels on en aura mis pour les consolider.

Après avoir établi le canevas général des triangles principaux le long de la côte qu'on veut lever, on y rattachera, figure 22, par des triangles secondaires et tertiaires tous les objets remarquables qu'elle présentera, tels que clochers, moulins à vent, tours, phares, sémaphores, etc. A ceux-ci se lieront les petits signaux qu'on aura fait élever sur les roches ou îlots principaux, et le long du rivage à une distance moyenne de 12 à 1,500 mètres les uns des autres selon les localités.

On disposera ces derniers de manière à ce qu'ils puissent être aperçus à la fois de la mer et de ceux des points de la triangulation principale ou secondaire qui pourront former avec eux des triangles convenables. On aura de cette manière le moyen de déterminer par le calcul les positions d'une multitude de points rapprochés sur lesquels on appuiera avec sécurité les opérations relatives à la topographie et à l'hydrographie.

Il sera utile, avant de placer tous ces signaux, de faire une reconnaissance du pays sur lequel doit s'étendre le réseau que l'on veut former. A cet effet on se transportera sur les édifices les plus élevés, et sur les sommités les plus appa-

rentes. De là on relèvera grossièrement, avec un petit théodolite, ou simplement avec un cercle à réflexion, les points qui paraîtront disposés convenablement pour remplir le but qu'on se propose; en rapportant ensuite ces relèvements sur la carte terrestre du pays, ou bien en s'en servant pour construire un canevas, on saura quels sont les points visibles les uns des autres, sur quels édifices on pourra faire station, et en quels lieux de la côte ou de l'intérieur il faudra faire ériger des signaux. On devra aussi aller en canot à une certaine distance du rivage afin de reconnaître celles des sommités intérieures qui se remarquent le plus de la mer; on y dressera des signaux si cela est nécessaire, et on les rattachera à la triangulation principale ou secondaire. Ce travail préliminaire, pour l'exécution duquel on ne peut que donner des idées générales, sera d'un grand secours pour hâter le travail définitif de la triangulation.

TOPOGRAPHIE.

18. Pour obtenir les détails topographiques, on place aux points les plus saillants de la côte des jalons distants les uns des autres de 100 mètres environ, selon les sinuosités plus ou moins prononcées du rivage; on les observe ensuite, avec un petit théodolite, de quelques points voisins déterminés par la triangulation principale ou secondaire. (Ces observations serviront à les placer graphiquement sur le plan de construction dont nous apprendrons à tracer la projection au chapitre XI.) De chacun d'eux on relève ceux qui les environnent, quelques signaux peu éloignés, la direction du rivage, les sommets principaux des roches ou des bancs de sable situés dans leurs parages, leurs limites aux

basses mers des grandes marées, les extrémités des divers caps, enfin tous les objets remarquables de la côte. Avant de commencer ces observations on a soin de faire un figuré aussi exact que possible, sur lequel on exprime, au moyen de hachures, les divers reliefs du terrain. L'intersection de ces relèvements désigne sur le plan de construction la place des caps, celle des roches ou des bancs de sable qui apparaissent pendant les basses mers; permet de tracer la ligne du bas de l'eau le long de la côte, la configuration des baies, anses, havres, etc., en un mot, de représenter tout ce qui peut intéresser les navigateurs.

Il est bon de faire ces figurés de la portion de côte comprise entre chaque signal ou chaque jalon à une échelle double au moins de celle à laquelle les divers plans particuliers devront être construits; on se pénétrera alors plus facilement des détails qu'il importe d'avoir et de ceux qui doivent être négligés. On s'arrangera aussi de manière à ne se servir, pour déterminer la position du lieu où l'on se trouve, que de points qui pourront se placer sur la feuille de construction.

Lorsque les relèvements pris des signaux sur les jalons de la côte se coupent sous des angles trop aigus ou trop obtus, on plante à une certaine distance, dans l'intérieur des terres, d'autres jalons disposés convenablement par rapport à ceux de la côte et aux signaux environnants; on les détermine à l'aide d'observations faites en ces derniers points, et on se sert de leurs positions pour placer ceux de la côte.

Pour obtenir les positions des maisons isolées, corps de garde, etc., ou des points saillants de la côte, qui se trouvent dans le voisinage d'un signal ou d'un jalon, on mesure avec une chaîne métrique leurs distances à ce point, où l'on

prend ensuite leurs directions par rapport à un signal connu. Les résultats fournis par ce procédé seront d'autant plus exacts que les inégalités du sol seront moins prononcées.

Si l'on voulait dans cette supposition déterminer promptement les sinuosités du rivage, on opérerait de la manière suivante : après avoir tiré (figure 22) une droite O P entre deux jalons, on se transporterait successivement sur ses différents points; on aurait soin de faire mesurer les distances parcourues Oy, Oy', Oy'',.... puis on ferait chaîner dans une direction perpendiculaire à O P les longueurs yx, $y'x'$, $y''x''$..... A l'aide de ce système de coordonnées on tracerait ensuite facilement sur le plan de construction les divers contours du rivage. Pour connaître les points x, x', x''... dans la direction desquels il faut faire chaîner, on placera sur 90° l'alidade du grand miroir d'un cercle à réflexion, et à chacun des points y, y', y''.... on examinera quel est l'objet de la côte dont l'image réfléchie coïncide avec le jalon P vu directement dans la lunette : ce sera cet objet qui déterminera la direction de la perpendiculaire à la droite O P.

Lorsque les abords de la côte seront parsemés de roches, il faudra les partager en groupes distincts les uns des autres, et se transporter pendant les grandes marées au moment de la basse mer vers la partie centrale de chacun d'eux, quand cela sera possible, ainsi que sur leurs sommets principaux. De là on observera quelques signaux de la côte, et on déterminera séparément les diverses parties de chaque groupe, c'est-à-dire, ses limites et ses têtes les plus remarquables qu'on aura le soin de faire blanchir toutes les fois que les circonstances locales le permettront. En voulant

relever indistinctement de chaque station les détails qu'ils présentent tous ensemble, on finirait par ne plus reconnaître, en construisant son travail, quels sont les relèvements qui appartiennent à tel ou tel groupe, malgré les vues qu'on aurait prises à chacun des points d'où on les aurait observés. On notera en même temps la hauteur des têtes principales de chaque groupe au-dessus du niveau de l'eau correspondant à l'heure où les observations auront été faites. On pourra alors déterminer leur élévation au-dessus du niveau des plus basses mers, en rapprochant ces résultats de ceux qu'auront fournis les observations faites au même moment à une échelle de marées (articles 21 et 24).

La laisse de basse mer, autour d'un banc de sable ou d'une île terminée de tous côtés par des roches plates qui assèchent en partie, se déterminera au moyen de stations rapprochées faites en ses divers points avec un cercle à réflexion. On trouvera à l'article 8 le procédé qu'il faudra employer pour arriver avec célérité à ce but, lorsque sur le banc de sable ou sur l'île se trouvera un édifice d'une élévation convenable.

Par cette manière de lever les détails topographiques d'une côte, on ne peut avoir exactement que la partie la plus voisine du rivage; les limites de culture et les divers mouvements du terrain sur le continent ne peuvent être que figurés à peu près. Il serait cependant utile de lever avec exactitude les environs des ports les plus importants; avec le secours de la planchette on aurait tous les détails qu'il serait nécessaire de connaître. Il est à regretter que jusqu'ici l'usage de cet instrument si simple et si expéditif n'ait pas été introduit dans la marine. On objectera peut-être

que pour s'en servir il faut avoir d'avance la position calculée de quelques points; mais, en mesurant une base provisoire avec une bonne chaîne de fer, on se procurerait bien vite ceux dont l'ensemble formerait le canevas du plan qu'on veut lever. L'erreur due à la mesure de la base ne serait d'aucune importance, vu le peu d'étendue du plan et l'échelle à laquelle on le lèverait.

HYDROGRAPHIE.

19. Pour déterminer les positions des lieux de la mer où l'on a sondé, on prend avec un instrument à réflexion les angles sous lesquels on aperçoit les droites qui joignent plusieurs signaux entre eux, et on construit sur elles des segments capables des angles observés. L'intersection des circonférences ainsi décrites marque sur le plan le point correspondant à celui où l'on a fait station.

On emploie pour ces constructions les procédés suivants, que M. Beautemps-Beaupré a développés dans l'appendice au voyage de d'Entrecasteaux :

Un point a (figure 22), d'où l'on a observé les angles CaF $=\alpha$, FaL $=\beta$, CaA' $=\gamma$, se déterminera par l'intersection des deux circonférences FaC, aFL. Leurs rayons Fo, Fo' s'obtiendront en élevant des perpendiculaires sur les milieux des droites CF, F L, et en prolongeant jusqu'à leurs rencontres avec elles les lignes Fo, Fo', qui font avec les droites CF et F L, des angles oFd, o'F n, égaux à l'excès en plus ou en moins de chacun des angles observés sur 90°. Lorsque ces derniers seront obtus, comme cela arrive dans le cas actuel pour CaF, la ligne Fo se mènera au-dessous de CF par rapport au point a. D'après ce procédé les angles C a F,

Fa L sont bien égaux à ceux qu'on a observés, car ils ont pour mesure la moitié des arcs FpC, FmL qui, d'après notre construction, mesurent le double de ceux-ci.

On remarquera que la position du point a serait indéterminée si l'angle F, que forment les droites CF, FL sur lesquelles on a élevé les perpendiculaires do, no', était tel que l'on eût :

$$F = 180 - (\alpha + \beta), \qquad \text{ou } F = \alpha - \beta.$$

Si les circonférences se coupaient sous un angle très-aigu, il y aurait quelque incertitude sur la position du point a; pour la lever on abaisserait de F une perpendiculaire sur la ligne oo', qui joint leurs centres, puis on prendrait à partir du point i une longueur $ia = iF$.

Enfin, quand les angles observés seront très-petits, on ne pourra pas compter non plus sur l'exacte détermination des centres o, o' par la méthode dont nous avons fait usage; il faudra alors calculer, dans les triangles rectangles Fdo, Fno', les longueurs od, $o'n$ ou les rayons oF, o'F; ou bien encore évaluer ces quantités à l'aide d'un compas de proportion et des tables de sinus naturels.

Pour vérifier la position précédente, on construira, au moyen d'un troisième angle CaA', un segment sur le côté CA'; ou bien on fera avec le rayon oC, en allant du point de départ C des angles vers a, un angle Cob égal au double de l'angle observé γ, puis on joindra A' avec b. La droite $A'b$ devra passer par le point a : car, si l'on considère l'angle CaA' comme formé par la corde aC et le prolongement aA' de la corde ab, on voit qu'il a pour mesure la demi-somme des arcs Ca, ab qu'elles sous-tendent; il est donc égal à $\frac{Cob}{2}$, ou

à l'angle observé. Ce procédé donnera d'autant mieux la position *a*, que la droite A'*b* rencontrera la circonférence F *b a* C sous un angle moins oblique et qu'en même temps le point *b* sera plus éloigné de A'; cette dernière observation ne s'applique qu'au cas où *b* se trouve situé entre A' et *a*.

Il importe donc, quand on fait une station, de ne pas relever indistinctement les signaux ou les points que l'on aperçoit; il faut surtout savoir choisir ceux qui par leurs positions relatives sont les plus propres à donner des arcs de cercles dont les intersections forment, autant que possible, des angles droits. Un croquis sur lequel seront placés graphiquement les divers signaux aidera beaucoup dans cette recherche.

Pour ne pas être obligé d'élever à chaque instant des perpendiculaires sur les milieux des droites qui joignent entre eux les signaux dont on s'est servi, on fait cette opération avant de commencer la rédaction du travail, et on les trace en rouge afin de mieux les distinguer des premières. Enfin, toutes les fois que la distance des deux signaux observés dépasse 3,000 mètres, on emploie, pour faire sur les plans de construction à une grande échelle les compléments des angles observés, un rapporteur en cuivre muni d'une alidade dont le vernier permet d'évaluer une minute.

La ligne qui unit entre eux l'ensemble des points déterminés comme on vient de le dire représente sur le plan celle qu'on a suivie en sondant.

20. Lorsqu'on a construit la route d'une journée on la rapporte sur un calque particulier, et on inscrit en tête le jour du mois où l'on a sondé; on indique aussi près de chaque station l'heure et la minute auxquelles elle a été faite.

L'échelle du plan de construction ne permettra pas, la plupart du temps, de placer toutes les sondes faites entre deux stations déterminées. On marquera néanmoins sur la droite qui les joint autant de points également espacés qu'on aura donné de coups de plomb, et on portera seulement sur ceux de ces points qui leur correspondent les sondes les plus propres à faire ressortir les inégalités du fond, dont on indiquera la nature à côté de chacune d'elles au moyen de signes abréviatifs.

Observations de la marée.

21. Avant de placer les chiffres de sondes sur les divers calques, il faut les *réduire*, c'est-à-dire en déduire le brassiage que l'on aurait trouvé si l'on avait sondé à l'instant des basses mers d'équinoxe. Pour être à même de faire cette opération, on établit bien solidement vers la partie centrale de la portion de côte que l'on explore, dans un lieu où les mouvements de la mer sont libres, une poutre divisée en pieds et pouces (on n'a pas encore adopté les mesures métriques pour les sondes), et on observe de quart d'heure en quart d'heure à quels numéros de cette échelle correspond le niveau de l'eau. Aux approches de la marée haute ou de la marée basse on resserre l'intervalle des observations, afin de mieux déterminer les heures précises de la haute mer et de la basse mer. On est convenu de prendre pour ces instants ceux qui tiennent le milieu entre le moment où elle cesse de monter ou de descendre et ceux où elle commence à descendre ou à monter.

On tient note durant les observations de la direction et de la force du vent ; on observe aussi la hauteur du baromètre,

afin de pouvoir apprécier l'effet produit par la pression atmosphérique sur le niveau de la mer.

Cet effet est tel que ce niveau s'élève lorsque le baromètre baisse, et réciproquement. Sa valeur est égale au produit de la variation barométrique par le rapport des pesanteurs spécifiques du mercure à l'eau de mer, qui est de 13,3 environ. Une variation subite dans la pression atmosphérique et quelques circonstances locales peu appréciables pourront apporter une très-légère modification à ce résultat. (Voir à ce sujet un mémoire de M. l'ingénieur en chef Daussy, inséré dans la Connaissanee des temps de l'année 1839).

Niveau moyen.

22. Si, dans un lieu *où rien ne s'oppose à l'entier développement de l'oscillation de chaque marée*, on mesure les *hauteurs absolues h, h'* de deux hautes mers consécutives au-dessus de la basse mer intermédiaire, la moitié de la demi-somme de ees deux nombres indiquera, à fort peu près, de combien la moyenne hauteur des deux pleines mers observées s'élève au-dessus du *niveau moyen*. On nomme ainsi le plan qui a la propriété de partager en deux parties égales l'amplitude de chaque marée, c'est-à-dire, l'espace compris entre le niveau d'une basse mer et celui de la haute mer correspondante. M. Daussy a remarqué, en comparant un grand nombre d'observations faites dans diverses localités, qu'il peut varier de quatre à cinq pouces par un vent faible et de cinq à six par un vent fort. Ainsi il faudra choisir un temps calme pour se procurer les éléments *h, h'* qu'on pourra prendre, si l'on veut, entre deux basses mers et la haute mer intermédiaire.

Le numéro de la division de l'échelle auquel il correspond

est représenté par

$$\frac{n+n'+2\,n''}{4};$$

n, n' désignant les numéros des deux hautes mers consécutives observées et n'' celui de la basse mer intermédiaire. Si l'on désigne actuellement par b la hauteur de la colonne barométrique au moment des observations, le numéro de l'échelle relatif au niveau moyen qui aurait lieu sous la pression moyenne de 28 pouces sera exprimé par

$$\frac{n+n'+2\,n''}{4} - 13{,}3\,(b - 28^{\text{pouces}}).$$

Pour obtenir une valeur exacte de cette quantité, il faut la déduire d'une moyenne entre plusieurs séries d'observations de jour et de nuit faites les unes à l'époque des syzygies, les autres à l'époque des quadratures. Le maximum de la différence entre ces deux genres de déterminations ne doit pas dépasser quatre pouces si la marée reçoit son entier développement dans le lieu où l'on a fait les observations.

Unité de hauteur.

23. La hauteur absolue H d'une marée syzygie quelconque au-dessus du niveau moyen peut être représentée, pour tous les points de la côte de France compris entre Cherbourg et Bayonne, par

$$H = UC,$$

expression dont le double indique par conséquent l'amplitude de cette marée.

La quantité U constante pour un même lieu se nomme l'*unité de hauteur de ce lieu*. Elle représente la hauteur, au-dessus du niveau moyen, de la marée qui a lieu un jour

ou deux après la syzygie, lorsque le soleil et la lune sont tous deux, à l'époque de la syzygie, dans le plan de l'équateur et dans leurs moyennes distances à la terre. Le coefficient C, dont la grandeur dépend des déclinaisons du soleil et de la lune et des distances de ces deux astres à la terre, est donné chaque année dans la Connaissance des temps pour toutes les marées syzygies. Il varie de 1,178 à 0,67.

La valeur de cette unité se déduira de la relation

$$U = \frac{H}{C},$$

en y mettant pour H le nombre $\frac{h+h'}{4}$, qu'on se sera procuré par des mesures prises un jour ou deux après une syzygie quelconque, et pour C le nombre de la Connaissance des temps qui correspond à cette syzygie. On ne pourra compter sur son exactitude qu'autant que l'oscillation de la marée sera complète dans le lieu des observations.

Si l'on connaissait la valeur du coefficient C pour tous les jours de l'année, on pourrait calculer, à l'aide de cette unité et du niveau moyen, les hauteurs des pleines mers et des basses mers au-dessus du niveau auquel sont rapportées les sondes; car on a généralement :

$$\text{Hauteur de la pleine mer} = \left\{\begin{matrix}\text{Hauteur du niveau moyen}\\ \text{au-dessus du zéro}\end{matrix}\right\} + UC.$$

$$\text{Hauteur de la basse mer} = \left\{\begin{matrix}\text{Hauteur du niveau moyen}\\ \text{au-dessus du zéro}\end{matrix}\right\} - UC.$$

Entre les deux points de nos côtes que nous avons cités plus haut, les marées sont sensiblement proportionnelles; ou, en d'autres termes, le rapport entre deux marées syzygies observées en même temps en deux lieux différents est le même

que celui qui existe entre deux marées correspondantes de quadratures observées aux mêmes lieux. Dans la Manche ce rapport cesse d'exister, et la formule ci-dessus ne peut pas y représenter exactement les phénomènes de la marée.

Détermination du niveau auquel on rapporte les sondes.

24. Si, par des observations analogues à celles de l'article 22, on sait de combien une marée syzygie s'abaisse au-dessous du niveau moyen, et qu'on veuille connaître le niveau inférieur d'une grande marée d'équinoxe qui doit servir de départ pour la réduction des sondes, on posera :

$$H = UC, \qquad H' = UC',$$

C', C étant les coefficients de la Connaissance des temps qui conviennent l'un à la marée équinoxiale, l'autre à la marée syzygie qui a fourni la valeur $H = \frac{h+h'}{4}$. De ces relations on tirera l'équation :

$$\left.\begin{array}{r}\text{Distance du niveau moyen au zéro}\\ \text{de l'échelle de réduction,}\end{array}\right\} \text{ou } H' = \frac{C'}{C} \times \frac{h+h'}{4}.$$

On prend habituellement pour C' la valeur 1,16; par conséquent la distance du niveau moyen à celui auquel sont rapportées les sondes dépasse toujours l'unité de hauteur.

Il sera utile d'indiquer sur un objet fixe, dans le voisinage de chaque échelle de marées, la trace du niveau moyen, et de spécifier dans les cahiers de rédaction à quelle distance se trouvait de ce plan le zéro d'où l'on est parti pour réduire les sondes.

Si du nombre $\frac{n+n'+2n''}{4} - 13,3\,(b - 28^{\text{po}})$, qui représente le numéro de l'échelle auquel correspond le niveau

moyen sous la pression moyenne 28 pouces, on retranche la valeur de H', le reste, exprimé par

$$\frac{n + n' + 2n''}{4} - 13,3\,(b - 28^{\text{pouces}}) - \frac{C'}{C} \times \frac{h + h'}{4},$$

désignera le numéro auquel se rapporte la basse mer d'où l'on devra partir pour réduire les sondes; ce sera le nombre constant qu'il faudra retrancher de tous ceux qu'aura indiqués l'échelle, afin de ramener les observations au niveau que l'on vient d'adopter.

Réduction des sondes.

25. La comparaison du brassiage obtenu à une heure donnée sur un certain point, avec la hauteur de la marée pour le même instant au-dessus du zéro de l'échelle, fera connaître suivant son signe, ou la quantité d'eau qui recouvre ce point au moment de la plus basse mer, ou de combien il est élevé au-dessus de son niveau.

26. Lorsque la côte que l'on explore est une plage peu inclinée, on se trouve souvent dans la nécessité de placer plusieurs échelles auxiliaires, afin d'arriver jusqu'à la basse mer. On remarque alors le numéro auquel correspond le niveau de la mer à l'échelle qu'elle est sur le point de quitter et celui qu'elle atteint à celle où l'on va continuer les observations. Avec cette donnée on peut rapporter toutes les observations au zéro de la même échelle. On marque aussi sur une roche, ou tout autre objet fixe du rivage qui se trouve dans le voisinage de l'échelle, la trace du niveau de l'eau relatif à l'une quelconque de ses divisions. Avec cette précaution on pourra toujours rendre les observations compa-

rables entre elles, quand bien même un accident obligerait de remplacer cette échelle par une autre.

27. Si la côte dont on fait la reconnaissance offre une étendue considérable, on conçoit qu'une seule échelle ne suffit pas pour réduire toutes les sondes, surtout si l'on doit opérer sur des plateaux de roches ou des bancs situés à quelques lieues du rivage. Il faut alors, lorsque les circonstances le permettent, faire observer la marée dans leurs environs, et partir de ces observations pour rédiger le travail hydrographique.

Pour réduire les sondes comprises dans la zone qui sépare deux échelles, on partage cet espace en trois portions égales; on réduit chacune des parties extrêmes en partant du zéro de l'échelle qui lui correspond, et la partie du milieu avec la moyenne des niveaux qu'indiquent leurs points zéros.

Deux échelles seront très-convenablement placées l'une par rapport à l'autre, si une sonde située vers la partie centrale de leur zone et réduite successivement avec l'une et avec l'autre, donne des résultats qui ne diffèrent pas entre eux de plus d'un pied ou un pied et demi.

Lorsqu'on fait la reconnaissance hydrographique d'un grand fleuve, il est très-important de placer vers son embouchure des échelles sur chacune de ses rives, et jusqu'aux lieux où il importe de connaître l'état de la marée. Elle y présente parfois des anomalies remarquables. Les méthodes données plus haut pour calculer le niveau moyen et l'unité de hauteur ne s'appliquent plus. Il faut conclure ces éléments des observations des pleines mers. Comme les détails dans lesquels nous pourrions entrer à ce sujet nous

conduiraient beaucoup trop loin, nous renverrons les personnes, qui désireraient avoir des notions précises sur les phénomènes que présentent les marées dans ces localités particulières, aux deux excellents mémoires que M. Daussy a publiés dans les Connaissances des temps des années 1831 et 1838.

Principes généraux pour faire des sondes.

28. Lorsqu'on fait une ligne de sonde on renvoie le plomb au fond de l'eau aussitôt qu'il en a été retiré, et qu'on a renouvelé le suif qui avait été mis à sa partie inférieure. On note le brassiage qu'on a trouvé et la nature de la surface du sol sur lequel il est tombé. Pour connaître la nature du fond, on mouille de temps en temps, après l'avoir enduite de suif, une lance échancrée dans ses divers points, et emboîtée vers sa partie moyenne dans une masse de plomb dont le poids s'élève jusqu'à 50 kilogrammes. En pénétrant dans le sol, elle en rapporte certaines portions dans ses échancrures; si elle atteint des roches, elle revient émoussée et rayée.

Il est inutile de noter l'heure chaque fois que l'on jette le plomb de sonde à la mer; on ne fait cette observation que lorsqu'on prend des angles pour fixer sa position.

Si le fond est peu considérable et très-inégal, il ne faut pas mettre un intervalle de plus de deux ou trois cents mètres entre chaque station; on doit de plus déterminer constamment par des observations les positions où l'on a trouvé un changement subit de brassiage, ou une nature de fond totalement différente de celle que rapportent habituellement le plomb de sonde ou la lance.

Quand on sonde à de grandes profondeurs ou dans des localités dont le fond, constamment de même nature, offre une pente régulière, on peut laisser un espace beaucoup plus grand entre deux points de station consécutifs.

29. Les embarcations dont on se sert dans les opérations hydrographiques étant beaucoup trop mobiles pour qu'on puisse les diriger convenablement avec une boussole, on remarque à terre deux objets distants le plus possible l'un de l'autre, et on gouverne dans leur direction pour faire une ligne de sonde. Lorsqu'ils sont connus de position par la triangulation, et placés l'un par rapport à l'autre comme on vient de le dire, on peut se contenter de prendre un ou deux angles seulement pour assigner sur le plan de construction la position d'une sonde. Dans tout autre cas on en prendra au moins trois sur des points disposés convenablement (article 19).

30. Il serait difficile d'indiquer les diverses méthodes que l'on doit employer pour sonder des bancs de sable ou de roche et les chenaux dont ils forment les limites. Le tact et l'expérience en apprendront beaucoup plus que tous les détails dans lesquels on pourrait entrer à ce sujet. Nous dirons seulement qu'il faut couper ces bancs en divers sens par des lignes de sondes très-serrées et avoir le soin de fixer leurs limites par des observations d'angles. Dans ces sortes d'opérations, le plomb ne doit pas quitter le fond et la lance doit souvent être mouillée. L'examen des résultats que l'on aura trouvés indiquera quelles sont les parties qui méritent une attention toute particulière, et sur lesquelles il faut faire

de nouvelles recherches. On devra en outre aller visiter toutes les localités où l'on aura remarqué que la mer brise ou lève habituellement, ainsi que celles où des remous se font sentir. Toutes les fois que les circonstances le permettront, il faudra observer la hauteur des roches dont les sommités ne sont jamais couvertes par la mer, et noter à quels intants les têtes les plus remarquables des plateaux ou les sommets des divers bancs se trouvent à fleur d'eau. De ces simples observations, on déduira aisément leurs élévations au-dessus du niveau des plus basses mers.

31. On conçoit maintenant comment, après avoir rapporté sur une même carte la configuration et les détails topographiques de la côte, les plateaux de roches, les bancs de sable, l'élévation de leurs principaux sommets au-dessus du niveau des basses mers d'équinoxe, la quantité d'eau qui reste sur ceux d'entre eux qui ne découvrent pas, leurs limites, le brassiage et la qualité du fond des autres parties de la mer, on conçoit, dis-je, comment on peut tracer les directions des passes, et indiquer les divers mouillages.

Une carte qui renfermera tous ces détails ne suffira pas encore pour satisfaire à tous les besoins des navigateurs, ou pour servir à l'instruction complète des pilotes. Elle devra être accompagnée en outre d'une collection raisonnée de vues indiquant, les unes, la direction des chenaux, les autres, les aspects divers sous lesquels se présente la côte, lorsqu'on est sur les principaux dangers. A tous ces renseignements qui parlent aux yeux, il faudra joindre une instruction précise sur les vents régnants et leurs effets, sur

la direction et la vitesse des courants tant généraux que particuliers, et sur les variations qu'ils éprouvent à divers instants de la marée. On indiquera l'établissement des différents ports; on donnera les éléments nécessaires, soit pour calculer la hauteur de la marée dans chacun d'eux à un jour et à un instant déterminés, soit pour obtenir la quantité d'eau qui se trouve à la même époque sur leurs barres ou sur les roches remarquables voisines de leurs entrées. On devra aussi faire connaître la hauteur et la portée des phares distribués le long de la côte, ainsi que la durée des éclipses de ceux d'entre eux qui ne sont pas fixes; enfin on observera la déclinaison de l'aiguille aimantée en divers points du rivage et au large.

On se procurera ces divers renseignements par ses propres observations, et en interrogeant les pilotes de chaque localité; on ne devra pas non plus dédaigner de recourir à de simples pêcheurs : on sera souvent surpris d'en recevoir des indications ignorées des pilotes eux-mêmes.

32. Nous terminerons ces considérations générales sur les levés hydrographiques, en conseillant aux marins, qui auront le désir de connaître les divers genres d'opérations que nécessite la reconnaissance d'une côte, de consulter l'ouvrage publié en 1829 par M. Beautemps-Beaupré, sous le titre d'*Exposé des travaux relatifs à la reconnaissance hydrographique des côtes occidentales de France*. S'ils sont à portée d'examiner avec soin les nouvelles cartes de nos côtes, ils apprendront comment le système des opérations hydrographiques doit être modifié selon que l'on explore une côte bordée de bancs de sable ou parsemée de roches. Ils

trouveront encore d'utiles enseignements dans le mémoire publié en 1833 par M. Le Saulnier de Vauhello, capitaine de corvette, sur les travaux hydrographiques et astronomiques qu'il a exécutés avec MM. Wissocq, Cazeaux et Darondeau, ingénieurs-hydrographes de la marine, dans le but de dresser les cartes d'atterrage des côtes occidentales de France. Ils devront aussi prendre connaissance des Descriptions nautiques des côtes de la Martinique et de l'Algérie publiées, l'une, en 1828, par MM. les ingénieurs Monnier et Duperré, l'autre, en 1837, par M. le capitaine de corvette Bérard et M. l'ingénieur Tessan. Enfin ils apprendront dans les mémoires de M. Daussy sur les marées des côtes de France, et dans l'Annuaire que publie M. l'ingénieur Chazallon, quel utile parti on peut tirer d'une série d'observations de marées faites avec soin.

Quant aux grandes reconnaissances hydrographiques qui se font sous voiles, ce serait dépasser notre but que d'en parler ici. Nous dirons seulement que, parmi les travaux de ce genre, on doit ranger au nombre des plus exacts ceux auxquels M. l'ingénieur Givry a dignement coopéré sous les ordres et la direction de l'amiral Roussin.

Nota. — On trouvera au chapitre XI, qui doit être considéré comme le complément de celui-ci, la manière de dresser les projections des plans et des cartes hydrographiques, et d'y rapporter tous les détails fournis par les diverses observations dont on vient de parler.

CHAPITRE III.

DE LA MESURE DES BASES.

33. La base d'où l'on part pour calculer tous les côtés des triangles exige beaucoup de précision dans sa mesure. En effet, si b est sa valeur exacte, et db l'erreur due au procédé à l'aide duquel on a obtenu sa longueur, on aura pour l'erreur des côtés a, c, auxquels elle se rattache :

$$da = db\,\frac{\sin A}{\sin B}, \qquad dc = db\,\frac{\sin C}{\sin B}.$$

Dans l'hypothèse où aucun angle n'est inférieur à 30°, chacune de ces quantités est plus grande que l'unité; car en supposant $B = 30°$, on a $A + C = 150°$, et par suite A ou $C = 75°$, valeur moyenne; donc :

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin 75°}{\sin 30°} = 1 + \ldots$$

Ainsi, plus la base sera petite par rapport aux côtés, plus l'erreur qui leur correspond l'emportera sur celle qui lui est propre.

Si l'on observe de plus que sin 75° approche du rayon et que $\sin 30° = \frac{1}{2}$, on voit qu'on a à peu près da ou $dc = 2\,db$. L'erreur des côtés peut donc devenir double environ de celle de la base, lors même que l'angle qui lui est opposé se trouve renfermé dans les limites reçues (art. 16); par conséquent, il est très-important que celle-ci soit aussi faible que possible si on ne veut pas s'exposer à obtenir des

valeurs très-fautives pour les longueurs des derniers côtés de la chaîne.

Il résulte de cette discussion et de ce qui a été dit à l'article 16, relativement aux angles d'un triangle, qu'une base ab (fig. 22) doit, pour réunir les conditions les plus avantageuses, se rattacher à l'un des côtés GE du réseau par des triangles équilatéraux abE, aEG; mais, comme les localités s'opposent presque toujours à ce qu'une telle liaison puisse avoir lieu, on se contente de former des triangles $b'a'E$, $a'b'G$ à peu près isocèles, et on prend pour la valeur du côté GE la moyenne des résultats fournis par la résolution des triangles $a'EG$, $Gb'E$.

Lorsqu'on a choisi, pour mesurer une base, un terrain uni et à peu près horizontal, d'où l'on puisse apercevoir l'un des côtés du réseau de triangles, on commence par établir à l'une de ses extrémités une pyramide régulière de six mètres de hauteur environ. On marque sur un pieu enfoncé en terre, dont la tête porte une plaque de cuivre, le point où il est rencontré par la verticale abaissée du sommet; on dispose ensuite en ligne droite une série de jalons à la distance de 150 à 200 mètres les uns des autres. Pour les aligner bien exactement, on place au centre de la pyramide un théodolite, ou un cercle répétiteur dont le limbe a été rendu vertical, et on dirige sa lunette sur un jalon planté vers l'autre extrémité de la base; ceux qui sont intermédiaires se placent de manière à être coupés en deux parties égales par le fil vertical de la lunette.

Pour mesurer la longueur ainsi jalonnée, on se sert de règles de métal ou de bois. Celles-ci, qu'on a soin d'enduire d'un vernis épais, après les avoir trempées dans l'huile

bouillante, afin de les préserver de l'humidité, sont ordinairement en sapin, et d'une longueur de cinq mètres. Leurs extrémités portent des garnitures en fer, taillées à vives arêtes; de plus, elles sont disposées dans une losange (fig. 4) de manière à ne pouvoir se déjeter. Elles ont l'avantage de ne point se ressentir des effets de la chaleur, car la dilatation paraît n'agir que dans leur sens transversal. Il n'en est pas de même quand on emploie des règles de métal; on place près d'elles des thermomètres destinés à faire connaître leur température, et avec cette donnée on calcule la longueur qu'elles avaient au moment des observations. Elles ont trois ou quatre mètres de long, et sont fixées solidement sur un madrier bien dressé *a b* (fig. 5). Cette pièce de bois porte sur des trépieds T, T, munis de vis, à l'aide desquels on peut aisément donner à chacune d'elles une position horizontale. Ceux-ci reposent ou sur des socles *s*, *s* fichés en terre, ou sur des chevalets de bois d'un mètre de hauteur, qu'on transporte d'une station à l'autre avec tout le système. Il est bon d'avoir trois de ces règles, parce qu'alors, quand on porte en avant celle qui était en arrière, on a plus de facilité pour la placer dans la direction qu'ont déjà les deux autres. Pour les disposer convenablement, on transporte le théodolite dans leur voisinage; par ce moyen, la personne qui est à la lunette peut donner plus aisément les signaux nécessaires à celle qui est chargée de les placer. Il est plus commode, cependant, de se servir des viseurs *v v* dont on arme ordinairement leurs extrémités. Après les avoir parfaitement alignées et mises à l'abri de l'action directe des rayons solaires, ainsi que leurs thermomètres, on leur donne une position horizontale avec les vis de leurs trépieds. On s'assure que cette

condition est remplie au moyen d'un *niveau à perpendicule* (fig. 5) que l'on porte successivement sur chacune d'elles. Cet instrument est construit de telle sorte que son alidade marque zéro, et la bulle d'air du niveau qu'elle porte est dans ses repères, lorsque ses jambes sont posées sur une surface horizontale.

Mesure du petit intervalle qui sépare les règles.

34. Comme, en faisant coïncider les extrémités de chaque règle, on pourrait occasionner un léger recul, et par suite introduire des erreurs notables dans la mesure de la base, on laisse entre elles un intervalle de quelques millimètres et on le mesure en y introduisant avec précaution un petit coin de fer ou de cuivre qu'on tient suspendu par un fil.

Soit (fig. 6) l le nombre de millimètres contenus dans le côté mm de sa tête, m celui que renferme son arête principale om; si n représente le numéro de la division 0, 1. 2.... n..... m où s'arrête ce coin quand on l'introduit entre deux règles dont les extrémités n, n sont dans un même plan horizontal, il est évident que le petit intervalle nn qui les sépare sera exprimé en millimètres par

$$nn = \frac{mm \times on}{om} = \frac{l}{m}\, n.$$

Si ces deux points ne correspondaient pas à la même division, que l'un fût en n', par exemple, alors l'intervalle des deux règles serait représenté par

$$n'n' = \frac{l}{m}\left(\frac{n+n'}{2}\right).$$

Dans le cas où $l = 5$ millimètres et $m = 100$ millimètres,

chaque intervalle *n n* a pour valeur en millimètres le vingtième du numéro de la division auquel il correspond.

Si le terrain sur lequel on opère était assez ondulé pour ne pas permettre de placer les règles *a*, *a'* à peu près dans un même plan horizontal, on ne pourrait plus employer le procédé précédent pour mesurer les distances comprises entre chacune d'elles; on les disposerait alors l'une plus bas que l'autre, et on s'assurerait que les deux bouts qui devraient être contigus sont dans la même verticale en les mettant en contact avec un fil à plomb; on aurait soin de faire plonger son poids dans un verre d'eau afin d'éviter au fil toute oscillation de la part du vent. On ajouterait dans ce cas, à la longueur totale de la base, celle du diamètre du fil à plomb répétée autant de fois qu'on en aurait fait usage.

A la fin de chaque journée, on marque avec un pieu, qu'on enfonce solidement en terre, l'endroit où l'on doit s'arrêter; mais on fait cette opération bien avant qu'on soit dans ses environs, de crainte que l'ébranlement du sol produit par l'enfoncement du pieu ne fasse déranger les règles. Le point où il doit être planté se détermine en les portant grossièrement bout à bout. Quand on l'y a placé, on fait descendre de l'extrémité de la dernière un fil à plomb dont la pointe est une aiguille très-fine; à l'endroit où elle s'arrête sur lui, on enfonce un clou de cuivre à tête plate, puis on y marque avec un poinçon le point que le fil à plomb y désigne. Le lendemain on continue l'opération, en commençant par mettre dans la verticale de ce point l'extrémité de la règle qui devait prendre place à la suite de la dernière posée la veille. Arrivé au terme de la base, on indique, sur la tête d'un nouveau pieu, le point où correspond l'extré-

mité de la dernière règle, puis on y érige une pyramide régulière dont le sommet se trouve exactement dans la verticale du lieu où l'on s'est arrêté. Telles sont les précautions minutieuses que le baron de Zach recommande de prendre si l'on veut arriver à des résultats satisfaisants.

Base brisée.

35. Les localités ne permettent pas toujours d'obtenir directement la distance entre les deux extrémités d'une base AC (fig. 7); on mesure alors les deux côtés AB, BC de la ligne brisée ABC, qu'on a tracée sur le terrain, et on observe avec beaucoup de soin l'angle B qui est toujours très-obtus. Cela posé, pour calculer $AC = b$, on traite comme rectiligne le triangle sphérique ABC, après avoir retranché de l'angle B le tiers de son excès sphérique, s'il est appréciable; on a alors, en posant $B = 180° - \alpha$, et observant que α représente des minutes seulement,

$$(1) \qquad b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\alpha = (a+c)^2 - ac\alpha^2.$$

On tire de là, en extrayant la racine carrée et multipliant par sin 1′ l'arc α qui est donné en minutes, pour l'exprimer en parties du rayon (article 6),

$$b = (a+c) - \frac{ac\,(\alpha \sin 1')^2}{2\,(a+c)}.$$

Il est possible aussi que les extrémités de la base ne soient pas visibles l'une de l'autre; alors un côté DE de la chaîne de triangles, des extrémités duquel on a observé les angles ADC, AEC, ne pourra se calculer avec $AC = b$ qu'autant que l'on connaîtra les deux angles aigus A, C du triangle ABC.

Or on a, comme on sait (article 5) :

$$\text{arc } A = \sin A + \tfrac{1}{6}\sin^3 A \ldots;$$

$$\sin A = \frac{a}{b}\sin \alpha = \frac{a\alpha}{b}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right);$$

ou, en substituant pour b sa valeur déduite de l'équation (1),

$$\sin A = \frac{a\alpha}{a+c}\left\{1 + \frac{\alpha^2(ac-a^2-c^2)}{6(a+c)^2}\right\}.$$

Si l'on introduit cette quantité dans la valeur de l'arc A, et qu'on change A et α en A sin 1′, α sin 1′ (article 6), on aura, pour la valeur de l'angle cherché en minutes,

$$A = \frac{a\alpha}{a+c} + \frac{ac(a-c)\alpha^3 \sin^2 1'}{6(a+c)^2};$$

celle de l'angle C serait exprimée par

$$C = \frac{c\alpha}{c+a} + \frac{ca(c-a)\alpha^3 \sin^2 1'}{6(c+a)^2}.$$

Mesure de l'inclinaison des règles.

36. Au lieu de corriger le défaut d'horizontalité des règles, ce qui est toujours assez long, on préfère évaluer leur inclinaison, qui ne dépasse jamais 2 ou 3 degrés, et calculer ensuite leur projection horizontale. Pour se procurer l'élément nécessaire à cette réduction, on place sur la règle les jambes du niveau à perpendicule et on amène, par le mouvement de son alidade, la bulle d'air du niveau d'eau dans ses repères; après avoir lu à quelle division du limbe elle s'arrête, on retourne l'instrument jambe pour jambe, et on rend de nouveau l'alidade verticale; il est clair que la moyenne des résultats obtenus dans ces deux opérations est la mesure de l'inclinaison cherchée.

Si l'on désigne actuellement par i le nombre de minutes qu'elle renferme, que de plus on représente par l la lon-

gueur de la règle et par l_1 celle de sa projection horizontale, on aura,

$$l_1 = l \cos i = l\,(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i) = l\left(1 - 2\left(\tfrac{i}{2}\right)^2\right),$$

à cause de la petitesse de l'angle i.

On tire de là, pour la valeur de la correction, ou la quantité à retrancher de la longueur obtenue avec la règle l :

$$l - l_1 = d\,l = -\frac{\sin^2 1'}{2}\, i^2\, l.$$

La différence de niveau dn de ses deux extrémités sera donnée par l'équation :

$$d\,n = \sin 1'\, i\, l.$$

Mesure de la dilatation des règles.

37. La chaleur fait varier la longueur des règles de métal; par conséquent, si la base a été mesurée avec des règles de cette nature à une température autre que celle à laquelle elles ont été étalonnées, les résultats obtenus seront ou trop forts ou trop faibles; il faut donc chercher le moyen de les corriger.

Soit α la *dilatation linéaire* de l'unité de longueur du métal, ou, en d'autres termes, la quantité dont s'allonge cette unité pour un changement de 1° du thermomètre centigrade; sur une règle contenant l de ces unités, la dilatation linéaire sera αl; par conséquent, si l'artiste qui l'a construite a trouvé en l'étalonnant que sa longueur était l à la température t, elle sera à la température T exprimée par

$$L = l + \alpha l\,(T - t) = l\,\{1 + \alpha\,(T - t)\}.$$

Ainsi, en notant la température de chaque règle pendant tout le temps que dure la mesure de la base, on aura les éléments nécessaires pour calculer la longueur réelle de l'espace mesuré avec chacune d'elles; on suppose d'ailleurs que l'on connaît leur rapport exact avec l'unité de mesure et la dilatation linéaire de leur métal.

Cette dilatation est de

$0{,}0000188 = \alpha$ pour le laiton,
$0{,}0000122 = \alpha$ pour le fer doux forgé,
$0{,}0000108 = \alpha$ pour l'acier non trempé.

Il suit de là qu'une règle en fer de 2 mètres de longueur à 10° deviendrait, à 28°,

$$L = 2^{m}(1 + 0{,}0000122 \times 18) = 2^{m},0002196.$$

Si, à cette même température de 28°, une base contenait 1000 fois cette règle, sa longueur réelle serait :

$$1000\,L = 2000^{m},2196.$$

On pourra toujours se contenter de prendre pour la température des trois règles, dont l'ensemble forme ce que l'on nomme une *portée*, la moyenne de celles qui seront indiquées par les trois thermomètres; la correction à faire à chaque portée sera alors de

$$\alpha\,(l + l' + l'')\left(\frac{T + T' + T''}{3} - t\right),$$

et sera positive ou négative, selon le signe du dernier facteur.

Réduction de la base mesurée au niveau moyen de la mer.

38. Si h' désigne la hauteur d'une des extrémités de la

base au-dessus des eaux de la mer, celle de l'autre sera $h' \pm dN$ (dN étant égal à la somme algébrique des $dn = \sin 1' i l$); celle de son milieu, ou du sol moyen sur lequel elle repose sera alors de $h' \pm \frac{dN}{2} = h$, et on pourra considérer comme se confondant rigoureusement avec l'arc terrestre qui passe par ce point la série de tangentes formées par les règles portées bout à bout et posées horizontalement.

Cela posé, pour obtenir la projection de cet arc ACB $= B$ (fig. 8) sur la surface des eaux supposée sphérique et prolongée sous le continent, il suffira de mener les verticales AO, BO par ses extrémités, et de calculer l'arc qu'elles comprennent; on trouvera alors que la valeur de la base réduite $acb = b$ a pour expression, en appelant R le rayon de la sphère,

$$b = \frac{BR}{R+h},$$

ou bien en développant et se bornant à la première puissance de $\frac{h}{R}$, ce qui suffit toujours, à cause de la petitesse de h comparativement à R,

$$b = B\left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

Par conséquent, de la base mesurée il faudra retrancher la quantité $\frac{Bh}{R}$ pour la réduire au niveau des mers.

On prend pour la longueur de R celle de la grande normale ρ' à la latitude du milieu de la base (pag. 152), et on se procure la hauteur h' soit par un nivellement géodésique, soit par des observations barométriques (articles 99 et 102). Quant au *niveau absolu* d'où l'on part, on choisit celui qui

tient le milieu entre deux hautes mers consécutives et la basse mer intermédiaire (article 22).

On emploiera au moins vingt jours pour mesurer une base de 5,000 mètres par le procédé qu'on vient d'indiquer, et, malgré toutes les précautions qu'on aura prises, on ne pourra pas répondre d'avoir sa longueur à un mètre près; on devra néanmoins la regarder comme très-bonne, surtout si elle n'est destinée qu'à confectionner une carte.

Dans la plupart des levés hydrographiques qui n'embrasseront pas une très-grande étendue de côte, on se servira tout simplement d'une bonne chaîne d'arpenteur en fer ou en cuivre, de 20 mètres de longueur, dont l'étalonnage sera bien connu. Sur un espace de 5,000 mètres, on ne devra pas être en erreur de plus de 2 ou 3 mètres, pourvu toutefois que, pour le mesurer, on ait eu le soin de la développer sur des poutrelles ou des planches disposées convenablement.

39. Quand on devra lever promptement le plan d'une rade ou d'une baie, on pourra, si des circonstances empêchent de mesurer une base à terre, prendre la hauteur de la mâture du navire au-dessus de l'eau; on obtiendra des résultats suffisants pour une simple reconnaissance, s'il est mouillé à une distance de la côte qui ne dépasse pas 3,000 mètres. On procédera à cet effet de la manière suivante:

Le navire étant affourché en A (figure 22) vers le point central de la baie, on commencera par faire un figuré de la côte et déterminer l'azimut astronomique de l'objet B le plus remarquable; on mesurera ensuite avec un cercle à

réflexion les angles BAC, BAD...., compris entre les points C, D... et lui. Cette première opération faite, on ira mouiller un canot en un point A', qu'on choisira de manière à ce que les droites A'B, A'C, A'D... coupent sous des angles convenables les premiers relèvements faits à bord du navire; en ce point A' on mesurera en outre l'angle sous lequel on aperçoit la mâture, et au même instant on fera prendre par une personne du bord l'angle BAA'; enfin on se transportera en un autre point A" où l'on recommencera de semblables observations.

Les arcs sous-tendus par la mâture feront connaître, comme on le verra tout à l'heure, les distances des points de station A', A" au navire, et les relèvements BAA', BAA" achèveront de les déterminer complétement. On pourra donc, avec ces bases et les angles observés, placer graphiquement sur un plan de construction les points remarquables de la côte, et s'en servir ensuite comme de signaux pour sonder.

Si l'on avait la possibilité de débarquer en B, on vérifierait, par la mesure des angles ABC, ABD...., les positions obtenues avec les éléments ci-dessus; on pourrait même les calculer au moyen de la distance AB, dont on prendrait pour valeur le résultat moyen fourni par les deux triangles AA'B', AA"B dans chacun desquels on connaît les angles à la base.

On pourrait encore, au lieu de déterminer des points à terre pour y assujettir le travail hydrographique, se faire relever du navire à chaque station, et se contenter de ne mesurer que la hauteur angulaire de sa mâture.

Cette manière de procéder pour lever un plan ne sera

jamais bien exacte, car très-rarement le mât se trouvera dans une position verticale au moment des observations, et on ne pourra guère répondre d'une minute dans les mesures angulaires de la mâture; or, sur une distance de 3,000 mètres, cette erreur d'une minute en produirait une de 65 mètres environ en plus ou en moins. Il faudra donc n'avoir recours à ce moyen que lorsqu'on y sera forcé, et n'opérer que dans un rayon de 3,000 mètres au plus; si l'on voulait continuer le travail au delà de cette limite, il serait nécessaire de changer le bâtiment de mouillage.

Voyons maintenant comment on peut déterminer la distance à laquelle on se trouve du navire, par la seule connaissance de la hauteur de sa mâture et de l'arc qu'elle sous-tend.

Soit (figure 9) $CD=e$ l'élévation de l'œil au-dessus du niveau de l'eau, $AB=h$ celle du sommet du grand mât au-dessus de ce même plan, et $ADB=\delta=d+d'$ l'arc qu'elle sous-tend à la distance $AC=x$, on aura :

$$\text{tang}\, d=\frac{h-e}{x},\qquad \text{tang}\, d'=\frac{e}{x},$$

et par suite,

$$\text{tang}\, \delta=\text{tang}\,(d+d')=\frac{hx}{x^2-e\,(h-e)}.$$

Si, après avoir résolu cette équation, on laisse de côté sa seconde racine, qui est étrangère à notre objet, et que dans le développement du radical on s'arrête au second terme, qui est toujours très-petit, il viendra :

$$x=\frac{h}{\text{tang}\,\delta}+\frac{e\,(h-e)}{\left(\frac{h}{\text{tang}\,\delta}\right)}.$$

Comme dans un canot on n'est jamais à plus de $1^m,7$ du

niveau de l'eau, le second terme de cette formule est toujours négligeable; par conséquent la valeur de x se réduit à

$$x = \frac{h}{\tang \delta},$$

comme si l'angle δ appartenait au triangle rectangle BAC.

Si l'on pouvait compter sur l'exacte détermination de cet angle, on devrait à la rigueur avoir égard au terme $\frac{e(h-e)}{\left(\frac{h}{\tang \delta}\right)}$, qui peut être positif, nul ou négatif, lorsqu'on observerait la hauteur angulaire de la mâture d'un point de la côte très-élevé au-dessus du niveau de l'eau; mais il faudrait alors mesurer en même temps avec beaucoup de précision la dépression apparente de l'horizon pour en conclure, au moyen de la table III, la hauteur absolue e de l'œil au moment de l'observation.

Par exemple, pour

$h = 40^{m}$, Dép^{on} app$^{te} = 0°\,17'\,43''$, et $\delta = 2°\,16'\,37''$,

on aurait:

$e = 100^{m}$, $\frac{h}{\tang \delta} = 1006^{m}$, $\frac{e(h-e)}{\left(\frac{h}{\tang \delta}\right)} = -5^{m},96$,

et par suite,

$$x = 1000^{m},04.$$

Ainsi l'erreur que l'on commettra en négligeant le second terme sera toujours inférieure à celle qui résultera de l'observation de l'angle δ.

40. Lorsque les localités ou d'autres circonstances ne permettront pas de mesurer directement l'espace qui sépare

les deux extrémités d'une base, on aura recours aux observations astronomiques, ou à la vitesse de propagation du son ; mais alors il faudra choisir pour termes extrêmes deux points éloignés l'un de l'autre de trente mille mètres environ, afin que l'erreur due aux observations ne soit qu'une très-petite fraction de leur distance réelle.

On donnera au chapitre X les formules dont on devra faire usage pour calculer une base par des observations de latitude et de longitude; quant aux procédés et aux calculs relatifs à sa mesure par la vitesse de propagation du son, nous n'en parlerons que très-succinctement; nous renverrons pour plus amples détails au premier volume des *Annales maritimes* de l'année 1837, où l'on trouvera un mémoire fort intéressant publié sur ce sujet par M. l'ingénieur-hydrographe Chazallon.

Voici en resumé ce qu'il dit sur cette matière :

Deux observateurs munis chacun d'un thermomètre, d'un hygromètre et d'un compteur, se placent à chaque extrémité de la base, et là font tirer à divers intervalles plusieurs coups de canon. Chacun observe de son côté l'état de l'hygromètre et du thermomètre, et note surtout bien exactement, à chaque coup que fait tirer son collaborateur, le nombre de secondes écoulées entre l'instant où l'éclair frappe sa vue et celui où la première sensation du bruit parvient à son oreille. Ce temps ne sera pas le même pour tous deux; celui qui est sous le vent mesurera un intervalle moindre que celui qui est au vent.

Les résultats moyens fournis par ces observations feront connaître la vitesse du son et la longueur de la base, en les substituant dans les deux équations suivantes :

$$V = 341^m,3 + 0^m,6058\left(\frac{\theta+\theta'}{2} - 15^\circ\right) + 0,085\left(\frac{f+f'}{2}\right),$$

$$B = V\left(\frac{T+T'}{2}\right).$$

T et T' indiquent pour chaque observateur le nombre moyen de secondes que le son a employé pour arriver à lui;

θ et θ' représentent en degrés centigrades la moyenne des températures accusées par le thermomètre de chaque station. On suppose chacune de ces quantités inférieures à 35°.

f et f' enfin expriment en millimètres, pour chaque station, la mesure moyenne de la tension de la vapeur d'eau contenue dans l'air; on les suppose moindre que 35 millimètres.

La table I fait connaître immédiatement la grandeur de ces quantités correspondantes à un nombre de degrés donné de l'*hygromètre à condensation*.

Quand on emploiera l'*hygromètre à cheveu*, sur l'exactitude duquel on devra moins compter, il faudra recourir aux deux autres tables qui suivent la précédente, et pour lesquelles $f = yF$. On prendra dans l'une la valeur de y correspondante à la moyenne des degrés qu'aura fait connaître l'hygromètre, et dans l'autre celle de F relative à la température moyenne de la station où il est placé.

Si, par exemple, on a trouvé à l'un des termes A de la base,

$T = 34'',60$, $\theta = 10^\circ,5$, hygromètre à cheveu $= 64^\circ$;

et à l'autre B,

$T' = 35'',50$, $\theta' = 12^\circ,0$, hygromètre à cheveu $= 60^\circ$;

on aura d'abord :

$$\frac{T+T'}{2} = 35'',05, \qquad \frac{\theta+\theta'}{2} = 11^\circ,25.$$

Les tables relatives à l'hygromètre à cheveu donneront ensuite pour 64°.. $y = 0,49$, et pour $\theta = 10^\circ,5$..$F = 9,85$; d'où l'on déduira :

$$f = yF = 4,81.$$

On aurait de même :

$$f' = y'F' = 4,79;$$

ainsi,

$$\frac{f+f'}{2} = 4,80;$$

par conséquent,

$$V = 341^m,3 + 0^m,6058(-3,75) + 0^m,085 \times 4,80 = 339^m,44,$$

et par suite,

$$B = 339^m,44 \times 35,05 = 11897^m,37.$$

Les meilleures observations pourront donner une erreur de 222 mètres sur 20,400 mètres, c'est-à-dire 11 millimètres environ par mètre; elle serait beaucoup plus considérable si la distance était moindre.

Lorsqu'on ne pourra tirer de coups de canon qu'à l'une des extrémités de la base, il faudra, *si l'air n'est pas parfaitement calme, avoir égard à la vitesse et à la direction du vent.* En désignant par ω et α ces deux quantités, on devra augmenter la valeur de V ci-dessus de $\omega \cos \alpha$; elle deviendra alors :

$$V' = 341^m,3 + 0^m,6058\left(\frac{\theta+\theta'}{2} - 15^\circ\right) + 0^m,085\left(\frac{f+f'}{2}\right) + \omega \cos \alpha;$$

par suite,

$$B' = (V + \omega \cos \alpha)\ T.$$

Le signe de ce dernier terme dépend de la grandeur de l'angle α qui se compte toujours de 0° à 360°, et de gauche à droite à partir de la base.

On trouvera dans le mémoire de M. Chazallon la description d'un instrument ingénieux qu'il a imaginé pour mesurer la vitesse ω. Dans la formule ci-dessus on suppose toujours qu'elle ne dépasse pas 10 mètres.

Si, dans l'exemple précédent, au lieu de répondre aux coups de canon partis du point B, on avait mesuré en A la vitesse du vent $\omega = 4^m.68$, sa direction $\alpha = 160°$, et trouvé dans ce cas, pour le temps de la propagation du son de B en A, $T = 35'',51$, on aurait eu, toutes les autres circonstances restant les mêmes :

$$B' = (339^m,44 - 4^m,68 \sin 70°) \times 35,51 = 11896^m,70.$$

Si l'on veut apporter tout le soin possible dans le genre d'observations qui nous occupe, il faudra qu'elles soient réciproques, parce qu'alors la demi-somme des vitesses observées donnera celle qui aurait lieu dans un air calme. De chaque station on tirera au moins cinq ou six coups de canon qui se croiseront de cinq en cinq minutes. On dirigera, si l'on opère pendant le jour, une lunette vers le lieu de l'explosion, et, au moment où l'éclair apparaîtra, on lâchera le ressort qui retenait l'aiguille du compteur; on l'arrêtera ensuite dès que le son se fera entendre.

Comme l'éclair s'aperçoit instantanément dans le ciel pendant la nuit, il en résulte que ce procédé pourrait servir à déterminer la distance de deux points éloignés quoiqu'ils ne fussent pas visibles l'un de l'autre.

Les personnes auxquelles l'analyse mathématique est

familière ne liront pas sans intérêt, dans le mémoire d'où nous avons extrait tout ce qui précède, les articles dans lesquels l'auteur examine les erreurs provenant du défaut de connaissance de la vraie vitesse du son et de l'incertitude qui existe sur l'appréciation exacte du temps qu'il emploie à se propager d'un point à un autre. Elles verront aussi quelles conséquences il a déduites de la comparaison des divers moyens de se procurer une base, et quel degré d'exactitude comporte chacun d'eux.

CHAPITRE IV.

RECTIFICATIONS DES INSTRUMENTS EN USAGE DANS LES OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES, ET MESURE DES ANGLES AU MOYEN DU CERCLE OU DU THÉODOLITE RÉPÉTITEUR.

41. La base une fois mesurée, on observe les trois angles de chaque triangle principal avec un cercle ou un théodolite répétiteur. On les répète un certain nombre de fois, afin d'atténuer les erreurs qui tiennent au pointé et aux vices de construction de ces instruments. L'expérience montre que des angles mesurés avec un cercle de $0^m,23$ de diamètre, dont le vernier permet de lire directement cinq secondes, sont déterminés très-exactement par trois séries prises dans des circonstances favorables, et dans chacune desquelles ils se trouvent repétés vingt fois.

Avant de procéder à leur mesure il faut faire diverses rectifications aux instruments dont on se sert.

On commence d'abord par détruire la *parallaxe des fils* dans chaque lunette, c'est-à-dire le dérangement qu'éprouve relativement à eux l'image d'un objet lorsqu'on le regarde par différents bords de l'oculaire. Cet effet cesse d'avoir lieu lorsque les fils se trouvent au foyer commun de l'oculaire et de l'objectif. Pour établir la coïncidence entre les foyers de ces deux verres, et amener ensuite les fils à ce point, on procédera de la manière suivante : On fera mouvoir dans le sens convenable *la monture qui porte à la fois le réticule et*

l'oculaire, jusqu'à ce qu'on distingue bien nettement un objet éloigné; on dirigera ensuite la lunette sur le ciel, et on fera marcher *l'oculaire seulement*, jusqu'à ce que les fils paraissent très-distincts; enfin, on fera mouvoir de nouveau *la monture* de toute la quantité qu'aura parcourue l'oculaire, mais en sens inverse. Si les fils de la lunette étaient fixes, on ferait mouvoir l'oculaire en avant ou en arrière jusqu'à ce qu'ils se trouvent à son foyer; puis ensuite on rapprocherait ou on éloignerait d'eux l'objectif, en donnant un mouvement convenable à la pièce dans laquelle il est enchâssé.

MESURE DES ANGLES AVEC LE CERCLE RÉPÉTITEUR DE BORDA.

42. La partie essentielle de cet instrument consiste (figure 1) dans un limbe divisé *ll*, qui porte deux lunettes indépendantes l'une de l'autre et mobiles autour de son centre. Chacune d'elles est munie d'une agrafe *a*, destinée à la fixer sur ce cercle à l'aide d'une vis de pression *p*. Celle qui se meut sur sa surface supérieure entraîne avec elle quatre verniers, au moyen desquels on peut évaluer exactement l'arc qu'elle a parcouru.

Ce limbe *ll* tourne autour de l'axe central d'un arbre *b b*, dont la partie inférieure est terminée par un tambour T. Vers sa partie supérieure se trouve un axe transversal *cc*, porté sur deux supports *c d*, *c d* que rattache ensemble une traverse *d d* vissée sur le talon qui termine une colonne mobile *e e*. Cette dernière pièce enfin a sa base au centre d'un cercle divisé *ff*, qui repose sur un trépied armé de vis V, V', V''.

Lorsqu'on fait tourner cette colonne autour de son axe *e e*, elle entraîne avec elle le limbe et ses deux lunettes.

L'arc parcouru dans ce mouvement de rotation se mesure sur le cercle *ff*, à l'aide du vernier de l'alidade *e v* qui fait corps avec elle.

Pour arrêter le mouvement de la colonne, on serre la vis *v*; alors tout le système est fixe. Si l'on desserre actuellement la vis *a'* de l'agrafe du tambour T, on pourra faire mouvoir le limbe qui entraînera les deux lunettes à la fois. En la serrant de nouveau et desserrant au contraire celles des deux lunettes, on leur fera prendre toutes les positions possibles l'une par rapport à l'autre.

Les vis de rappel *v*, *v''*, *v'''* et la vis sans fin du tambour sont destinées à produire lentement les divers mouvements de la colonne, des lunettes et du limbe.

Ainsi on peut donner, 1° un mouvement de rotation à tout l'instrument autour de sa colonne; 2° cette pièce étant rendue immobile, le limbe et les deux lunettes peuvent tourner sur son axe; 3° les deux lunettes sont susceptibles à leur tour d'être rendues fixes ou mobiles indépendamment l'une de l'autre.

Outre ces divers mouvements on peut encore renverser le limbe avec sa monture en le faisant basculer autour de l'axe *c c*. Pour produire cet effet, il suffit de desserrer la vis *v'* qui presse contre un quart de cercle adapté à cet axe.

Ces principes généraux étant posés, passons aux diverses rectifications de l'instrument. Il est essentiel d'abord qu'*un parallélisme parfait existe entre le limbe et les axes optiques des deux lunettes*, c'est-à-dire, les droites qui passent par le centre de réfraction de chaque objectif et l'intersection des fils des réticules; les angles observés sont alors dans le même plan que celui sur lequel on compte les degrés. Pour

remplir cette condition on rend d'abord vertical le plan du limbe (figure 1), par le procédé qu'on indiquera plus bas; puis on dirige la lunette supérieure sur un objet *o*, éloigné et bien net. Après avoir lu le numéro de la division à laquelle correspond le zéro du vernier du pied de la colonne, on fait faire à l'instrument une demi-révolution autour d'elle, et on ramène l'objectif de la lunette vers le même point de mire. Il est bien évident que dans sa nouvelle position l'axe optique *bo'* (figure 1), fait avec la droite *ab*, parallèle au limbe, le même angle *abo'* qu'avant le retournement du limbe à 180°; seulement il est dirigé à gauche de cette ligne, s'il était à sa droite au commencement de l'opération.

Pour amener cet axe dans la position *ab* qu'on cherche à lui donner, il faut donc faire parcourir à l'intersection des fils la moitié de l'intervalle observé *obo'*. On se sert à cet effet des deux vis qui font marcher, en serrant l'une et desserrant l'autre, le châssis auquel ils sont attachés. Lorsque les fils sont fixes, on fait tourner l'objectif d'une quantité convenable sur son axe. Le défaut de sphéricité de ce verre permet d'employer ce moyen.

Pour éviter les tâtonnements dans la bissection du petit angle *obo'*, on note la position du vernier *v* placé au bas de la colonne, lorsque la lunette est dirigée sur le point *o*; après le retournement du limbe on ramène la lunette sur ce même point à l'aide de la vis de rappel *v*, et on évalue le petit arc parcouru; on fait alors revenir le vernier sur lui-même d'une quantité égale à la moitié de cet arc, puis ensuite on amène les fils sur l'objet au moyen des vis de leurs châssis.

Lorsque, après quelques répétitions du même procédé, on a rendu le parallélisme parfait, on l'établit pour la lunette inférieure en amenant l'intersection de ses fils sur le point où correspondent ceux de la lunette supérieure. Cette opération se fait avec les vis de leurs châssis, ou en faisant tourner l'objectif d'une quantité convenable autour de son axe.

43. Si après cette rectification on veut rendre bien vertical le fil qui est à peu près parallèle au limbe, on le dirigera sur un objet éloigné bien net, et on examinera si en faisant mouvoir la lunette, après avoir desserré l'agrafe qui la retenait, le point qu'on avait visé passe à sa droite ou à sa gauche. Pour détruire cet effet, s'il a lieu, on desserrera la vis qui fixe le tuyau où se trouve le châssis des fils et on le fera tourner autour de l'axe de la lunette, d'une quantité suffisante, pour que la déviation observée ne se reproduise plus; on serrera alors la vis dont on vient de parler et on sera sûr de la verticalité du fil, ou, ce qui est ici la même chose, de son parallélisme avec le plan du limbe.

44. Lorsque dans la caisse du cercle répétiteur se trouvera une *lunette d'épreuve,* on pourra s'en servir pour la rectification des axes optiques; mais avant il sera nécessaire de s'assurer qu'elle-même est rectifiée. On la placera sur le limbe de l'instrument disposé horizontalement, et on remarquera à quelle ligne d'un objet très-éloigné répond son fil rendu d'abord horizontal par le procédé qu'on vient d'indiquer. Si, en la renversant sur ses faces opposées, la même ligne n'est pas rencontrée par le fil, on élèvera ou

on abaissera celui-ci de la moitié de la distance comprise entre les deux lignes observées. Si ce fil n'était pas mobile, on ferait cette opération en tournant l'objectif sur son axe, comme précédemment. Cette rectification étant faite, on dirigera sur la ligne de repère observée les lunettes de l'instrument, et on amènera sur elle les intersections de leurs fils à l'aide des vis de leurs réticules ou du mouvement de leurs objectifs.

Mesure de l'angle compris entre deux objets.

45. Pour mesurer actuellement l'angle compris entre deux points, après avoir rendu immobile la colonne de l'instrument en serrant la vis v de son pied (figure 1), on amène dans leur plan les axes optiques des deux lunettes avec deux des vis V, V′ du pied, et on a bien l'attention de les y conserver pendant tout le temps que dure l'observation. (Si les deux objets étaient très-inclinés à l'horizon, on ferait pencher le limbe vers leur plan en desserrant la vis v' qui l'empêche de tourner autour de son axe horizontal.) Cette disposition prise, on fixe la lunette supérieure sur zéro et on la dirige sur l'objet de gauche en faisant tourner sur son axe de rotation le limbe rendu mobile par le desserrement de l'agrafe a' du tambour; lorsqu'on a arrêté l'instrument dans cette position, on pointe la lunette inférieure sur celui de droite. L'objet de gauche étant alors amené bien exactement à l'intersection des fils avec la vis sans fin du tambour, qui entraîne à la fois le limbe et ses deux lunettes, on fait mouvoir la vis de rappel v''' de la lunette inférieure jusqu'à ce que l'objet de droite soit coupé en deux parties égales par son fil vertical; on desserre alors l'agrafe a'

du tambour, puis on fait tourner le limbe sur son axe jusqu'à ce que la lunette inférieure soit sur l'objet de gauche. On arrête de nouveau le limbe, et on desserre l'agrafe v'' de la lunette supérieure pour l'amener sur celui de droite. L'espace circulaire qu'elle a parcouru pour y arriver est évidemment le double de l'angle compris entre les deux points en question. Si, après cette opération, l'intersection des fils de la lunette inférieure ne correspondait plus au point sur lequel elle était fixée d'abord, on l'y ramènerait avec la vis sans fin du tambour, et on mettrait la lunette supérieure sur l'autre avec sa vis de rappel v'. Prenant maintenant pour départ la division où est arrivé le vernier de cette lunette, et la dirigeant de nouveau sur l'objet de gauche à l'aide d'un mouvement donné au limbe, on pourra recommencer l'opération précédente et obtenir ainsi le quadruple de l'angle qu'on cherche, puis ensuite le sextuple, etc.

Si les numéros des divisions de l'instrument se succédaient de droite à gauche lorsqu'on se suppose au centre du limbe, ce serait la lunette supérieure qu'il faudrait diriger sur l'objet de droite au commencement de chaque opération.

Mesure des distances zénithales.

46. Lorsqu'on veut mesurer une distance zénithale, on renverse le limbe en desserrant la vis v' (figure 1), et on fait en sorte *qu'il soit vertical ainsi que l'axe e e de la colonne de l'instrument.*

Pour donner cette position à cet axe, on place le limbe renversé dans la direction de deux des vis V, V' du pied et

on amène au milieu du tube, avec la vis de rappel v''' de la lunette inférieure, la bulle d'air du grand niveau qu'elle porte; on fait ensuite tourner tout l'instrument de 180° sur sa colonne. Si dans cette nouvelle position la bulle d'air ne se fixe pas au milieu du tube, comme on l'y avait placée d'abord, on fera la correction moitié avec les deux vis V, V' du pied, en élevant l'une et abaissant l'autre simultanément, et moitié avec la vis de rappel v''' de la lunette inférieure. Quelques épreuves du même genre suffiront pour amener cette bulle à ne plus quitter ses repères dans le retournement du limbe à 180°, c'est-à-dire quand on le replacera dans le vertical des deux vis V, V'. Si actuellement, après avoir fait tourner le limbe de 90° autour de la colonne, la bulle n'occupe plus le milieu du tube, on l'y ramènera avec la troisième vis V'' dans la direction de laquelle ce mouvement a placé le plan du limbe. De cette manière, l'axe de la colonne se trouvant à la fois dans deux plans verticaux sera lui-même vertical; alors, quelque position qu'on donne au limbe autour de la colonne, le niveau ne devra plus se déranger.

47. *Pour rendre le limbe vertical*, on met dans ses repères le petit niveau qui lui est perpendiculaire. A cet effet, on fait marcher la vis de rappel v^{IV} (fig. 1), voisine de v', qui imprime à ce cercle un mouvement de rotation autour de l'axe transversal *cc*. On sent que la verticalité n'a lieu qu'autant que ce petit niveau est perpendiculaire à la surface du limbe. Afin de s'assurer qu'il satisfait à cette condition, on emploie un fil à plomb qu'on fait battre librement dans les fentes pratiquées sur les tiges de deux pinces, qui s'adaptent aux points le plus haut et le plus bas de la cir-

conférence du limbe. On fait confondre la fente de la pince inférieure avec le fil à plomb par le moyen de la vis de rappel v^{IV}; on amène ensuite la bulle du petit niveau au milieu de son tube avec la vis placée à l'une de ses extrémités; cette opération se fait une fois pour toutes, car il est bien rare que cette perpendicularité cesse d'avoir lieu quand elle a été une fois bien établie.

48. Il est aisé de voir que la verticalité du limbe n'aurait pas lieu, quand bien même le fil à plomb battrait dans les fentes des tiges, si leurs distances à son plan n'étaient pas égales; il faut donc *vérifier les pinces avant d'en faire usage*, si l'artiste n'a pas eu le soin de les construire convenablement. Après avoir disposé le limbe de manière à ce que le fil batte dans les fentes de leurs tiges, on les détache pour les mettre l'une à la place de l'autre, et l'on introduit de nouveau le fil à plomb dans la fente de la tige supérieure; on remarque alors l'intervalle qui le sépare de celle de la tige inférieure, puis on amène sous lui le milieu de cet espace à l'aide de la vis de rappel v^{IV}, voisine de v'. Pour mieux apprécier cette distance, généralement peu considérable, on fait une marque sur la tige au point où bat le fil à plomb, et l'on rentre ou l'on sort cette pièce de la moitié de l'espace observé, en la vissant sur sa pince ou en la dévissant un peu; le reste s'achève, comme on vient de le dire, en faisant marcher la vis de rappel v^{IV} jusqu'à ce que le fil batte dans la fente de la tige ainsi allongée ou racourcie. Si, actuellement, on change les pinces de place, le fil devra battre encore librement dans leurs deux fentes; elles seront donc dans les conditions voulues pour remplir le but auquel

elles sont destinées; on sera sûr alors, en mettant la bulle du niveau dans ses repères, qu'il est, dans cette position, perpendiculaire au plan du limbe, et que réciproquement ce plan sera vertical toutes les fois que le petit niveau sera calé.

49. L'instrument étant ainsi disposé, on opère de la manière suivante pour mesurer une distance zénithale. On fixe la lunette supérieure sur zéro, et on place le limbe à gauche de la colonne si l'instrument est divisé de gauche à droite; on desserre l'agrafe *a'* du tambour, qui arrête le mouvement du limbe, et on dirige la lunette sur l'objet; on rend ensuite horizontal le grand niveau avec la vis de rappel v''' de la lunette inférieure. Si cette opération a imprimé au limbe un petit mouvement autour de son axe de rotation, la lunette supérieure ne sera plus sur l'objet; on y ramènera ses fils avec la vis sans fin du tambour, et on remettra le niveau dans ses repères avec la vis de rappel v'''; enfin, après s'être assuré que le fil horizontal est bien tangent à l'objet, on retournera l'instrument de 180°; on desserrera l'agrafe de la lunette supérieure, puis on lui fera décrire une demi-circonférence pour la ramener sur le point; si dans ce mouvement le grand niveau ne s'est pas dérangé, l'arc qu'elle aura parcouru sera la mesure du double de la distance zénithale cherchée. Si la bulle d'air n'était plus au milieu de son tube après le retournement du limbe, cela proviendrait d'une légère inclinaison produite, sur le diamètre horizontal de ce cercle, par le mouvement donné à la lunette supérieure; on la corrigerait alors tout entière avec la vis sans fin du tambour, puis ensuite on amènerait l'objet sous les fils de la lunette supérieure avec

sa vis de rappel v''. En répétant plusieurs fois la même opération et partant toujours, pour chacune, du point d'arrivée du vernier à la fin de la seconde observation conjuguée, on aura successivement le quadruple, le sextuple, etc., de la distance zénithale.

Évaluation en secondes des parties du grand niveau.

50. Pour être en état d'apprécier l'erreur que l'on commettrait en négligeant de remettre la bulle du grand niveau dans ses repères, après le retournement du limbe, il faut évaluer d'avance le nombre de secondes correspondant à une ou plusieurs parties de l'inclinaison de ce niveau. Le limbe étant vertical, on amène à cet effet la lunette supérieure fixée au zéro sur un objet quelconque; on dispose ensuite la lunette inférieure de manière que l'une des extrémités de la bulle de son niveau se trouve sur la dernière division tracée sur le tube. Lorsqu'on s'est assuré que le fil horizontal de la lunette supérieure se trouve toujours sur l'objet, on fait tourner le limbe avec la vis sans fin du tambour, jusqu'à ce que la même extrémité de la bulle soit vis-à-vis une division quelconque du tube, distante de la précédente de n parties, par exemple; on ramène alors la lunette supérieure sur le point que l'on a visé, en faisant usage de sa vis de rappel v'', et l'arc parcouru représente le nombre de secondes correspondant à une inclinaison de n parties du niveau. Pour avoir un résultat plus exact, on recommence plusieurs fois la même mesure, en partant toujours, au commencement de chacune, du point d'arrivée de la lunette à la fin de la précédente. En divisant l'arc total qu'elle à successivement parcouru par le nombre n de

parties du niveau, répété autant de fois qu'on a fait d'opérations, on a très-exactement le nombre de secondes correspondant à une partie de la division du tube. Il faudra prendre le nombre n de parties tel que l'autre extrémité de la bulle ne touche pas au bout du tube.

MESURE DES ANGLES AVEC LE THÉODOLITE RÉPÉTITEUR DE GAMBEY.

51. Le théodolite répétiteur de Gambey a, sur le cercle de Borda, l'avantage de donner les angles observés réduits immédiatement à l'horizon; il y a donc économie de temps à s'en servir dans les opérations géodésiques, puisqu'on est dispensé de prendre les distances zénithales des signaux, et que, dans la rédaction du travail, on a de moins à effectuer tous les calculs relatifs à la réduction à l'horizon.

Dans ceux de ces instruments qui n'ont point de limbe vertical, la lunette supérieure porte sur deux supports fixés au limbe du vernier, et la lunette inférieure, qui n'a d'autre objet que d'indiquer si dans le cours d'une opération l'instrument s'est dérangé de la position qu'il avait d'abord, est fixée au bas de la colonne et peut s'incliner à volonté. Ainsi, sans nouvelle figure, on peut se représenter un instrument du genre de celui dont nous parlons, en supposant que dans la figure 1 la colonne *ee* soit prolongée jusqu'au limbe, que la lunette inférieure soit appliquée en *g*, et que la supérieure soit placée sur deux supports qu'entraîne avec lui le limbe du vernier. Pour rendre cet instrument propre aux observations, *il faut placer dans une position horizontale le plan du limbe, ainsi que l'axe de rotation de la lunette; de plus, il*

faut faire en sorte que l'axe optique de cette lunette soit perpendiculaire à son axe de rotation.

52. Ces diverses rectifications s'opèrent de la manière suivante : On met un niveau à cheval sur l'axe de rotation de la lunette, et on le place dans la direction de deux des vis du pied ; avec elles on amène sa bulle dans ses repères, et on le retourne bout pour bout ; si la bulle est dérangée, on fait l'une des moitiés de la correction avec la vis qu'il porte à l'une de ses extrémités, et l'autre avec celles du pied. Le niveau étant rectifié, pour s'assurer de l'horizontalité de l'axe de rotation sur lequel il repose, on fait décrire à la lunette une demi-circonférence sur le limbe. Si, dans cette nouvelle position, le niveau n'est plus calé, on le ramène à cet état, moitié avec les vis du pied, moitié avec celles qui sont adaptées à la partie supérieure de l'un des supports de l'axe (l'une s'élève et l'autre s'abaisse). L'axe étant rendu horizontal après quelques épreuves du même genre, on donne cette position au limbe en faisant décrire à la lunette un arc de 90°, et en ramenant avec la troisième vis du pied la bulle du niveau au milieu de son tube.

Enfin, pour établir la perpendicularité entre l'axe optique et celui de rotation, après avoir placé la lunette sur zéro, on amènera ses fils sur un objet éloigné, par le mouvement de la vis de rappel du limbe. On l'enlèvera de dessus ses supports, et on la retournera sur son axe ; on la fera mouvoir ensuite avec sa vis de rappel jusqu'à ce que l'intersection de ses fils soit revenue sur l'objet. Cette opération terminée, on la fera rétrograder de la moitié de l'arc qu'elle aura parcouru, et on ramènera les fils sur le point au moyen

des vis de leurs réticules. Si, actuellement, on la retourne de nouveau sur son axe, l'objet devra encore se trouver à leur intersection; quand cette circonstance n'a pas lieu, on recommence l'opération précédente. Si l'on s'apercevait que l'un des fils n'est pas vertical, on lui donnerait cette position en faisant tourner le collet qui le porte, comme pour le cercle répétiteur.

53. Veut-on actuellement mesurer l'angle horizontal entre deux objets? On dirigera sur un point éloigné et bien net la lunette inférieure, qu'on y aura amenée à peu près avec la vis de rappel du pied de la colonne, *avant de commencer les rectifications;* on fixera la lunette supérieure sur zéro, et, par le mouvement du limbe avec sa vis de rappel, on placera bien exactement l'intersection de ses fils sur l'objet de gauche. Si la lunette inférieure ne correspondait plus au point de repère après cette opération, on l'y ramènerait, avant de passer outre, avec la vis de rappel du pied de la colonne, et on remettrait la supérieure sur l'objet qu'on a visé, à l'aide de la vis du limbe; alors on détachera l'agrafe de la lunette supérieure pour la pointer sur l'objet de droite. Si dans ce mouvement l'instrument s'était un peu dérangé, on en serait averti par le déplacement de la lunette inférieure; il sera d'autant plus sensible que l'objet sur lequel elle est dirigée sera plus éloigné et bien délié : on commencerait alors par la remettre sur le point qu'elle a quitté, avec la vis de rappel du pied de la colonne, puis ensuite on mettrait exactement le fil vertical de la lunette supérieure sur l'objet de droite, avec sa vis de rappel. L'arc parcouru depuis zéro sera la mesure

de l'angle cherché. Si l'on rend actuellement le limbe libre en desserrant l'agrafe de sa vis de rappel, qu'on replace sa lunette sur l'objet de gauche et qu'on recommence la même opération, on aura successivement le double, le triple, etc., de l'angle.

54. Les rectifications à faire et la marche à suivre, pour mesurer une distance zénithale, sont les mêmes avec le théodolite qu'avec le cercle répétiteur; seulement on emploie un procédé différent pour rendre l'axe optique de la lunette parallèle au limbe, lorsque ce cercle a une position verticale. On commence par arrêter le mouvement de la lunette autour de son axe de rotation. On se sert pour cela d'une virole qui traverse à la fois deux tiges de cuivre; l'une est adaptée au limbe et l'autre à la monture de la lunette. On dirige alors l'intersection des fils sur un objet éloigné, et on fait tourner l'instrument de 180° autour de sa colonne; on ramène la lunette sur ce point en lui faisant décrire une demi-circonférence, puis on observe de combien l'intersection des fils en est séparée; on la ramène sur lui, avec la vis du vernier placé au bas de la colonne (page 69), et avec celle du ressort que porte le tuyau de la lunette vers son milieu. Si, dans le cours de l'opération relative à la mesure d'une distance zénithale, le grand niveau se dérangeait, on remettrait sa bulle dans ses repères avec la vis du pied la plus voisine de l'oculaire ou de l'objectif.

Il est très-rare qu'en transportant l'instrument d'un point de station à un autre les vis des supports et celles des réticules se dérangent, surtout ces dernières : on voit donc combien son installation est prompte et facile.

55. Lorsqu'on observe avec cet instrument des points autres que ceux de la triangulation principale, on ne répète pas généralement les angles; on dirige sur celui qu'on a pris pour départ la lunette supérieure fixée au zéro, et on arrête le plan du limbe en serrant la vis de son agrafe; on rend libre alors cette lunette, et on la dirige sur tous les points de l'horizon qu'on veut relever.

CHAPITRE V.

CORRECTIONS DIVERSES QUE DOIVENT SUBIR LES ANGLES OBSERVÉS AVANT D'ÊTRE EMPLOYÉS DANS LES CALCULS.

56. Les angles observés ont besoin en général, avant d'être employés, de subir diverses corrections qui dépendent de *l'excentricité des lunettes de l'instrument, de sa position relativement au centre de la station, de la position des signaux par rapport au centre de l'édifice sur lequel ils sont placés, de l'inclinaison du plan dans lequel on observe par rapport à celui de l'horizon, enfin de la manière dont les points sont éclairés.*

CORRECTION RELATIVE À L'EXCENTRICITÉ DES LUNETTES.

57. Comme dans tous les cercles répétiteurs que l'on construit aujourd'hui la lunette inférieure seule est excentrique, nous n'examinerons que ce cas.

Désignons par e la distance CO, qui, dans la figure 11, représente la distance du centre de la lunette inférieure à l'axe de rotation du limbe de l'instrument, ou son *excentricité*, par G et D les distances approchées du point de station aux objets de gauche et de droite; enfin supposons que les positions respectives des lunettes supérieure et inférieure soient représentées dans la première partie de l'observation par les directions des lignes SG, ID. Au commencement de l'observation conjuguée, elles auront les positions S'G', I'G; à la fin, celle-ci n'aura pas bougé;

mais l'autre, ou la supérieure, aura pris la direction S″D et parcouru sur le limbe un arc S′SS″ dont nous désignerons le nombre de degrés par n.

Cela posé, si on appelle x l'angle GCD qu'il s'agit d'obtenir en fonction de n, α, α' les angles en G et en D, on aura par les deux triangles GAC, DAB :

$$x + \alpha = \alpha' + \text{ABD};$$

mais ce dernier angle a pour supplément O′BO ainsi que l'angle O′CO, donc

$$x + \alpha = \alpha' + \text{O}'\text{CO} = \alpha' + \text{S}'\text{CS},$$

à cause de l'égalité des triangles O′Cl′, OCl et de la partie commune l′CO; d'un autre côté,

$$\text{S}'\text{CS} = \text{S}'\text{CS}'' - \text{SCS}'' = n - x;$$

donc enfin $x + \alpha = \alpha' + n - x$.

On tire de là, en mettant pour α et α' leurs valeurs déduites des triangles rectangles GCO′, DCO, et prenant les arcs pour les sinus, puis réduisant en secondes (article 6) :

$$\text{Correction d'excentricité} = x - \frac{n}{2} = \pm\left(\frac{\frac{1}{2}e}{\text{D}\sin 1''} - \frac{\frac{1}{2}e}{\text{G}\sin 1''}\right).$$

Le signe inférieur s'appliquerait au cas où l'excentricité serait à gauche.

58. Quelques théodolites de Gambey ont un limbe vertical sur lequel est placée la lunette supérieure; il convient donc de calculer aussi pour cet instrument la correction d'excentricité, qui est toujours beaucoup plus considérable que dans le cercle répétiteur.

Si SG est la position de la lunette au commencement

de l'observation (fig. 12), elle sera S'D à la fin, et aura parcouru sur le limbe l'arc $OO' = n$; cela posé on aura comme ci-dessus :

$$x + \alpha = n + \alpha',$$

d'où

$$x - n = \alpha' - \alpha,$$

et par suite,

$$\text{Correction} = \pm \left(\frac{e}{D \sin 1''} - \frac{e}{G \sin 1''}\right).$$

Le signe inférieur convient au cas où l'excentricité est à gauche.

RÉDUCTION DES ANGLES AU CENTRE DE LA STATION.

59. Supposons (figure 14) que C soit le centre d'un signal, et O le point d'où l'on a observé l'angle $GOD = O$; pour calculer l'angle $GCD = x$ en fonction du précédent, menons par le point O des parallèles Og, Od aux droites CG, CD, nous aurons :

$$GOD = GOg + GOd - DOd,$$

ou bien en posant $GC = G$, $CD = D$, $OGC = \alpha$, $ODC = \alpha'$:

$$O = \alpha + x - \alpha', \text{ d'où } x - O = \alpha' - \alpha;$$

mais les triangles CDO, CGO donnent, vu la petitesse des angles α et α', en appelant y l'angle GOC et r la distance OC :

$$\alpha' = \frac{r \sin(O + y)}{D}, \qquad \alpha = \frac{r \sin y}{G}.$$

On a donc pour la correction exprimée en secondes (art. 6) :

$$\text{Correction} = \frac{r \sin(O + y)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G \sin 1''}.$$

Cette formule se réduirait à un seul terme, si l'un des points était un astre, parce qu'alors on pourrait supposer D ou G infini, selon qu'il serait à droite ou à gauche.

Si l'on remarque que dans le triangle GCD on a $G = \frac{D \sin d}{\sin(d+x)} = \frac{D \sin d}{\sin(d+O)}$, parce que x diffère très-peu de O, on pourra mettre la formule précédente sous cette forme :

$$\text{Correction} = \frac{r \sin O \sin (d-y)}{D \sin d \sin 1''}.$$

Quoique cette dernière ne renferme qu'un seul terme, cependant on emploie de préférence la première. Avec celle-ci on n'a pas besoin de recourir aux autres stations pour se procurer les éléments nécessaires à la réduction ; de plus, si l'on doit réduire plusieurs angles qui ont le même départ, l'un des termes est le même pour tous, en sorte qu'il ne reste plus qu'à calculer l'autre, ce qui se fait très-simplement.

Quant aux valeurs de D et G, il suffit de les connaître approximativement ; à cet effet, on les calculera avec des logarithmes à cinq décimales seulement, en supposant que les observations ont été faites au centre de chaque signal. Le tableau de la page 199 renferme une application de cette formule.

60. Il arrive souvent que la distance r et l'angle y ne sont pas donnés directement : on obtient ces deux éléments par des mesures et des calculs qui dépendent de la forme du signal ou de l'édifice sur lequel on fait station.

Quelques exemples vont suffire pour indiquer la marche à suivre dans les différents cas qui pourront se présenter.

Lorsque le signal est une tour cylindrique AOB (fig. 16), et que l'on est placé en C, pour avoir la direction CO du centre, on mène deux rayons visuels CA, CB tangents à la tour, et on mesure les longueurs $CA = CB = m$, $CE = n$. La demi-somme des angles GCA, GCB fait connaître l'angle GCO, dont le complément à 360° est, dans le cas actuel, la valeur de y. La distance $CO = r$ s'obtient au moyen du triangle rectangle CAO dans lequel on a, en posant $EO = x$:

$$(n + x)^2 = x^2 + m^2;$$

d'où

$$x = \frac{m^2 - n^2}{2n},$$

et par suite,

$$r = \frac{m^2 + n^2}{2n}.$$

On vérifiera cette valeur en ajoutant à la longueur n celle du rayon EO, qu'on déduira de la mesure directe de la circonférence AOB de la tour; cette manière d'opérer sera même toujours préférable à la première, à cause de l'incertitude qui existe sur les longueurs CA, CB.

61. Plusieurs des clochers qui servent de signaux ont la forme d'un parallélipipède rectangle, à base carrée, et sont surmontés d'une flèche octogonale ou conique, en pierre ou en ardoise, dont l'axe est le même que celui du parallélipipède. Il résulte de cette construction que l'on ne peut obtenir directement les éléments nécessaires pour réduire au centre de la station les angles observés sur les galeries de ces édifices; nous allons examiner les différents cas qui peuvent se présenter dans cette circonstance.

Lorsqu'on peut installer l'instrument à l'un des angles de la balustrade, en A (fig. 15), il suffit, pour obtenir sur-le-champ l'angle $GAO = y$, d'ajouter 45° à l'angle GAF' qu'on observe directement en plaçant verticalement un objet en F' (une erreur de plusieurs minutes est sans importance). On a ensuite $r = OA = \frac{m}{2}\sqrt{2}$ en faisant $AF' = m$.

Si le point de station est en B, milieu du côté $AF = AF' = m$, alors

$$y = \begin{cases} OBG = 90° - (GBA \text{ qu'on mesure directement}), \\ \frac{aBG + bBG}{2} \end{cases}$$

et

$$r = \begin{cases} OB = AB = \frac{AF}{2}, \\ \text{ou bien encore} \\ Oc + Bc = \frac{\frac{1}{2}a}{\text{tang } 22°,30'} + (Bc \text{ qui s'obtient directement}), \end{cases}$$

(On suppose $ab = a$.)

Quand on est placé en C, la valeur de y s'obtient en retranchant de l'angle observé GCF, l'angle OCF calculé par l'équation

$$\text{tang } OCF = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{m}{2} - AC},$$

où tout est connu; quant à r, on a :

$$r = OC = \frac{\frac{m}{2}}{\sin OCF}, \text{ ou } \frac{\frac{m}{2} - AC}{\cos OCF}.$$

Si l'on était en D, dans la direction du rayon Ob, l'angle y serait égal à la demi-somme des angles aDG, dDG qui

se mesurent directement, et la distance r serait donnée par

$$r = Ob + bD = \frac{\frac{a}{2}}{\sin(22°,30')} + (bD \text{ qu'on mesure directement}).$$

Enfin, si l'instrument est placé en M sur la galerie du clocher, pour avoir l'angle y, il faudra prendre les directions G M d, G M b, et mesurer les longueurs des trois côtés du triangle b M d. De ces données on déduira par le calcul les angles en b et d; cette première opération faite, on calculera le triangle O b M, où l'on connaît bM, $Ob = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin(22°\,30')}$, et l'angle $ObM = 67°\,30' + (dbM$ obtenu par le calcul).

Avec les valeurs que sa résolution aura fournies, on déterminera l'angle de direction y de la manière suivante :

y = (G M b mesuré directement) — (O M b déduit du calcul);

ou bien, en employant le triangle OMD :

y = (G M d mesuré directement) + (O M d déduit du calcul).

La valeur de r sera donnée par la résolution de ces mêmes triangles.

En général, il faudra toujours prendre pour valeurs des éléments r et y la moyenne des résultats obtenus par les diverses méthodes qu'on aura employées.

RÉDUCTION DE L'ANGLE OBSERVÉ ENTRE DEUX SIGNAUX, AU CENTRE DE L'ÉDIFICE SUR LEQUEL L'UN D'EUX EST ÉTABLI.

62. L'un des signaux qu'on relève peut ne pas se trouver au centre de l'édifice sur lequel on l'a établi; s'il est en c à l'un des angles du carré (fig. 17), par exemple, il faudra retrancher de l'angle observé G O c la partie C O c.

Or, si l'on mène la droite $Cc = r$, qu'on abaisse de C la perpendiculaire Ce sur $Oc = D$, et qu'on mesure l'angle $CcO = c$, on aura :

$$\text{tang } O = \frac{ce}{Oe} = \frac{r \sin c}{D - r \cos c};$$

d'où, pour la valeur en secondes de la correction cherchée, vu sa petitesse :

$$\text{Correction} = \pm \frac{r \sin c}{D \sin 1''}\left(1 + \frac{r \cos c}{D}\right).$$

Le signe inférieur s'appliquerait au cas où le signal observé se trouverait entre le centre de l'édifice sur lequel il est placé et celui avec lequel on le relève.

RÉDUCTION DES ANGLES À L'HORIZON.

63. Supposons que l'angle BhA (figure 13) ait été observé dans un plan incliné à l'horizon, et qu'il s'agisse d'obtenir sa projection horizontale $B'hA'$. Si l'on imagine une verticale hH et une sphère dont h serait le centre, les plans verticaux BhB', AhA' et le plan BhA la couperont suivant les arcs de grands cercles Hb, Ha, ba. Ils formeront un triangle sphérique dans lequel le côté ab sera la mesure de l'angle observé $BhA = h$, et dont l'angle bHa sera égal à la projection horizontale de ce même angle. Si donc on mesure avec le cercle les distances zénithales Ha, Hb, et qu'on les désigne par z, z', on connaîtra les trois côtés de ce triangle; par conséquent, l'angle H qu'il s'agit de calculer sera donné par la formule :

$$\sin \tfrac{1}{2} H = \left[\frac{\sin(s-z)\sin(s-z')}{\sin z \sin z'}\right]^{\frac{1}{2}},$$

dans laquelle $s = \frac{h + z + z'}{2}$ (page 11, relations F).

64. On l'emploie quand les distances zénithales diffèrent de l'angle droit de plusieurs degrés; mais, comme ordinairement la différence ne va pas au delà de deux ou trois en plus ou en moins, on préfère calculer la correction qu'il faut faire subir à l'angle observé pour obtenir l'angle horizontal.

A cet effet, élevons au carré les deux membres de l'équation précédente, et remplaçons $s-z$, $s-z'$ par leurs valeurs déduites de la relation $s=\frac{h+z+z'}{2}$, nous aurons :

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{H} = \frac{\sin\left\{\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{2}(z-z')\right\} \sin\left\{\tfrac{1}{2}h-\tfrac{1}{2}(z-z')\right\}}{\sin z \sin z'},$$

ou en développant et réduisant, puis retranchant de part et d'autre $\sin^2 \frac{1}{2} h$:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{H} - \sin^2 \tfrac{1}{2} h = \frac{(1-\sin z \sin z') \sin^2 \tfrac{1}{2} h - \sin^2 \tfrac{1}{2} (z-z')}{\sin z \sin z'}.$$

Mais en vertu des deux premières relations (7) de la page 7 et de la quatrième des relations (2) de la page 6, on a :

$$1-\sin z \sin z' = \sin^2 \left\{ 90^\circ - \tfrac{1}{2}(z+z') \right\} + \sin^2 \tfrac{1}{2}(z-z'),$$

et

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{H} - \sin^2 \tfrac{1}{2} h = \frac{1-\cos \mathrm{H}}{2} - \frac{1-\cos h}{2} = -\left(\frac{\cos \mathrm{H} - \cos h}{2}\right);$$

d'où, au moyen de la quatrième des relations (9), page 8 :

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{H} - \sin^2 \tfrac{1}{2} h = \sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{H}+h) \sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{H}-h) = 2 \sin \tfrac{1}{2} h \cos \tfrac{1}{2} h \sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{H}-h)$$

à cause du peu de différence entre H et h; donc

$$\sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{H}-h) = \frac{\sin^2 \left\{ 90^\circ - \tfrac{1}{2}(z+z') \right\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h - \sin^2 \tfrac{1}{2}(z-z') \cot \tfrac{1}{2} h}{2 \sin z \sin z'}.$$

Cette équation est susceptible d'être mise sous une forme

plus simple; en effet, puisque z et z' approchent beaucoup de 90°, leur différence est très-petite; on peut donc admettre que $\sin z \sin z' = 1$, et prendre les arcs pour les sinus : on aura alors pour la correction exprimée en secondes (article 6) :

$$H - h = \left(90° - \frac{z+z'}{2}\right)^2 \tang \tfrac{1}{2} h \sin 1'' - \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} h \sin 1''.$$

Telle est la formule dont on fait usage toutes les fois que les distances zénithales diffèrent de l'angle droit de moins de trois degrés.

Si l'une d'elles était de 90°, c'est-à-dire si l'un des points observés se trouvait à l'horizon, on aurait simplement :

$$H - h = \left(45° - \frac{z'}{2}\right)^2 \left(\frac{\tang^2 \frac{1}{2} h - 1}{\tang \frac{1}{2} h}\right) \sin 1'';$$

mais on a, par la troisième des formules (6) de la page 7 :

$$\frac{\tang^2 \frac{1}{2} h - 1}{\tang \frac{1}{2} h} = -2 \cot h;$$

par conséquent,

$$H - h = -2 \left(45° - \frac{z'}{2}\right)^2 \cot h \sin 1''.$$

Ainsi, toutes les fois que l'un des objets est à l'horizon, la correction est proportionnelle à la cotangente de l'angle observé entre eux; on doit donc surtout y avoir égard lorsque cet angle est petit. Elle serait nulle s'il était de 90° ainsi que la distance zénithale de l'un des points.

On trouvera aux pages 197 et 199 une application de chacune des formules qu'on vient de démontrer.

PHASES DES SIGNAUX.

65. Si l'objet sur lequel on pointe n'est pas terminé

par un sommet aigu, l'angle observé aura besoin de subir une correction qui tient à la manière dont il est éclairé par le soleil. On pourra se dispenser d'y avoir égard, si l'on a soin de faire les observations à plusieurs reprises dans des circonstances favorables et à des heures différentes. La moyenne de toutes ces mesures donnera, avec beaucoup d'exactitude, l'angle qu'on cherche.

66.* Voici néanmoins les formules qu'il faudrait employer si les dimensions du signal exigeaient qu'on calculât la correction qui nous occupe. Supposons, par exemple, qu'il ait pour base un rectangle (fig. 17) et que ab soit la face éclairée; l'angle mesuré sera GOA, et pour avoir le véritable il faudra lui ajouter le petit angle $AOC = x$. Or, dans le triangle ACO, on connaît le côté CO par le calcul approximatif du triangle GOC, le côté AC, moitié du côté du carré $abcd$, et l'angle ACO par une observation faite dans la direction de la droite AC. On a donc en posant $CO = n$, $AC = m$, et observant que x est très-petit,

$$x = \frac{m}{n} \sin (C+x) = \frac{m}{n} (\sin C + x \cos C);$$

d'où

$$x = \frac{m}{n} \sin C \left(1 - \frac{m}{n} \cos C\right)^{-1} = \pm \frac{m}{n} \frac{\sin C}{\sin 1''},$$

ce qui est toujours suffisant. Le signe inférieur s'appliquerait au cas où bc serait la face éclairée.

Supposons actuellement que le signal soit une tour ronde (fig. 18), que le soleil, dont AS, A'S, CS représentent la direction des rayons, en éclaire la partie ABA', et que l'ob-

servateur soit placé en O, à une très-grande distance du point C; il apercevra la partie $aABa'$, limitée par les deux parallèles am, $a'm'$ à la droite OC, moins la portion aA qui est privée de la lumière directe de l'astre; en sorte que le rayon visuel réellement dirigé sur la moitié de la partie visible ne sera pas représenté par OC, mais par la droite Oc qui joint le point O avec le milieu c de la ligne Da', projection orthogonale de la partie visible ABa'. Pour calculer l'angle $COc = x$, on a par le triangle OCc rectangle en C :

$$x = \frac{Cc}{OC},$$

en prenant l'arc pour la tangente.

Or, $$Dc = \frac{2aC - aD}{2} = Cc + aC - aD;$$

d'où

$$Cc = \frac{aD}{2} = \frac{r - CD}{2} = \frac{r(1 - \cos Aa)}{2} = r \sin^2 \tfrac{1}{2} BCO,$$

en posant $AC = r$ et observant que l'angle $ACa = BCO$ comme ayant le même complément ACO. Mais $BCO = COn = 180 - Z$; on a donc définitivement pour la correction exprimée en secondes :

$$\text{Correction} = \pm \frac{r \cos^2 \frac{1}{2} Z}{D \sin 1''}.$$

Elle s'ajoute à l'angle observé quand le soleil et le signal qu'on relève avec la tour sont tous deux du même côté par rapport à elle; elle s'en retranche s'ils sont de côtés différents.

Pour obtenir l'angle Z, on dirigera la lunette de l'instrument sur le centre de la tour, puis ensuite on l'amènera dans le vertical du soleil; on s'assurera qu'elle a cette posi-

tion au moyen d'un fil à plomb placé près de l'objectif, et dont l'ombre devra se projeter le long de son axe; l'arc parcouru sur le limbe sera, à quelques minutes près, la mesure de l'angle $COS' = Z$. Comme il n'est pas le même pendant tout le temps que dure l'observation de l'angle compris entre la tour et le signal, on prend pour sa valeur celle qu'on obtient par une moyenne entre les azimuts pris au commencement et à la fin de la série.

CHAPITRE VI.

CALCULS DES CÔTÉS DES TRIANGLES QUI COMPOSENT LE CANEVAS TRIGONOMÉTRIQUE D'UNE CARTE, ET DÉTERMINATION DE LEURS SOMMETS AU MOYEN DE LEURS DISTANCES À LA MÉRIDIENNE ET À LA PERPENDICULAIRE DE L'UN D'EUX.

67. Lorsqu'on a fait subir aux angles observés les diverses corrections indiquées dans le chapitre précédent, que la base mesurée et tous les sommets du réseau ont été projetés sur une même surface de niveau, il est facile de procéder au calcul de ses divers côtés. Comme les triangles qui le composent sont toujours très-petits par rapport au rayon de la sphère sur laquelle ils se trouvent, et par conséquent peu courbes, on peut leur appliquer la méthode de Legendre. Elle consiste, comme on sait, *à ôter de chacun de leurs trois angles le tiers de l'excès de leur somme sur* 180° *et à résoudre ensuite par les formules de la trigonométrie rectiligne les triangles dont on a ainsi modifié les angles.*

Quel que soit le soin apporté dans la mesure des angles, *il est rare qu'un triangle se ferme exactement*, c'est-à-dire que la somme de ses trois angles soit juste égale à 180° + *l'excès sphérique;* cependant on doit regarder comme très-bon celui dans lequel l'erreur ne va pas au delà de 4″ ou 5″ en plus ou en moins. L'expérience a montré qu'avec de telles observations on obtenait les résultats les plus satisfaisants.

Pour calculer la longueur de ses côtés, il faut répartir

par tiers sur chaque angle et l'excès sphérique et l'erreur qui provient des observations. Pour faire de suite cette double opération, on ajoute à chacun d'eux ou on en retranche le tiers de l'excès en plus ou en moins de leur somme sur 180°, sans s'inquiéter de l'excès sphérique. Le triangle étant ainsi disposé, on en déduira (article 2) :

$$c = \frac{b}{\sin B} \sin C, \qquad a = \frac{b}{\sin B} \sin A.$$

Dans ces formules, dont on trouvera une application à la page 202, b représente la base réduite au niveau moyen (article 38).

Avec ces côtés a, c, on calculera les triangles auxquels ils servent de base, et on aura ainsi de proche en proche les longueurs de tous ceux de la chaîne réduits au niveau des mers.

EXCÈS SPHÉRIQUE.

68. L'excès de la somme des trois angles d'un triangle sphérique sur deux droits, ou son excès sphérique, a pour expression en secondes :

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{R^2 \sin 1''}.$$

α étant l'aire du triangle considéré comme rectiligne, et R le rayon de la terre exprimé en mêmes unités que les côtés du triangle. Or

$$\alpha = \frac{ab \sin C}{2} \text{ (article 13)};$$

par conséquent,

$$\varepsilon = \frac{1}{2 R^2 \sin 1''} ab \sin C.$$

Cette quantité est toujours très-petite, car dans l'immense

triangle formé en Espagne, par MM. Biot et Arago, elle ne s'est élevée qu'à 39″,03. Ce triangle, le plus grand de ceux qu'on ait mesurés jusqu'à ce jour, a été calculé alternativement par les formules rigoureuses de la trigonométrie sphérique, et en suivant la marche que nous venons d'indiquer; sur son plus grand côté, qui dépasse 160,900 mètres, on n'a trouvé de différence que dans les fractions de mètre. Ainsi la méthode de Legendre doit, comme le remarque M. Puissant, par sa simplicité, son exactitude et principalement par son indépendance de toute hypothèse sur l'aplatissement de la terre, avoir la préférence sur toutes celles qu'on pourrait lui substituer.

69. Si l'on ajoute aux angles moyens d'un triangle le tiers de son excès sphérique, on aura les valeurs de ceux qu'il faudrait employer si l'on voulait résoudre ce triangle comme sphérique. Nous verrons plus tard que la connaissance de ces angles est nécessaire, lorsqu'on veut calculer les positions géographiques et les azimuts des sommets des triangles d'un réseau.

70. Lorsqu'on a calculé tous les triangles qui forment le canevas principal de la carte de la partie de côte qu'on veut lever, on se sert de leurs côtés comme d'autant de bases pour obtenir les points secondaires et tertiaires. Dans les triangles de ce dernier ordre, on se contente généralement de n'observer qu'une seule fois les deux angles adjacents à la base et de conclure le troisième; mais on a soin d'avoir toujours *deux triangles au moins* pour calculer un même point, et de prendre pour valeur de leur côté commun la moyenne des résultats obtenus.

DISTANCES À LA MÉRIDIENNE ET À LA PERPENDICULAIRE.

71. Si, par la verticale d'un lieu, on mène deux plans perpendiculaires entre eux, et dont l'un passe par les pôles de la sphère céleste, ils intercepteront sur cette surface deux grands cercles. Les pieds des normales menées des différents points de leurs circonférences sur la terre formeront le *méridien* et la *perpendiculaire* de ce lieu. La première de ces courbes est plane parce que la surface terrestre est un ellipsoïde de révolution. Elle se confond à son origine avec la *méridienne* du lieu, qui n'est autre chose que l'intersection du plan du méridien avec l'horizon. La seconde est à double courbure; néanmoins on peut la considérer, dans une certaine étendue, comme faisant partie de la section de la surface terrestre par le plan mené perpendiculairement au méridien suivant la verticale du lieu.

C'est ordinairement à ces deux lignes qu'on rapporte les différents points d'une triangulation. A cet effet, on suppose rabattus successivement sur l'horizon du lieu A, où l'on a placé l'origine des axes AX, AY (figure 20), les divers triangles de la chaîne, puis on mène par chacun de leurs sommets des parallèles à ces droites. Les côtés de ces triangles deviennent par là les hypoténuses de triangles rectangles dont on calcule les côtés de l'angle droit en partant de l'azimut Z observé à l'origine des axes ou déduit du calcul. Par la transformation des coordonnées parallèles on se procure ensuite les distances de tous les sommets du réseau à la méridienne et à la perpendiculaire du lieu pris pour départ.

Ce procédé ne fait pas connaître les distances réelles de chaque point aux axes circulaires AX, AY; car supposons

que la figure 20 représente une chaîne de triangles ABD, BDM... rabattus sur l'horizon du lieu A et correspondants aux triangles sphériques AB'D', B'D'M'..., on aura pour la valeur des coordonnées du point B :

$$B\alpha = AB \sin Z, \qquad A\alpha = AB \cos Z.$$

Z étant l'azimut connu du premier côté AB' de la chaîne.

Or il est clair que ces quantités devront différer un peu de celles que donnerait la résolution du triangle sphérique correspondant AB'a; et celui-ci ne fournirait pas la distance réelle B'e de B' à la perpendiculaire de A. (En supposant l'angle Z de 45°, la différence entre Aa et B'e s'élèverait à peu près à 15 mètres pour une distance de AB' égale à 150,000 mètres.) Actuellement, pour avoir la position d'un second point M relativement à A, on mènera, d'après nos conventions, en B une parallèle By à AY, et on déduira du triangle rectangle Bα'M :

$$M\alpha' = BM \sin Z', \qquad B\alpha' = BM \cos Z';$$

puis, par suite, pour les coordonnées absolues de M par rapport à A :

$$M\alpha'' = B\alpha + M\alpha', \qquad A\alpha'' = A\alpha + B\alpha'.$$

Or on voit sur-le-champ, par la marche qu'on a suivie, que ces longueurs Mα'', Aα'' doivent ne pas être tout à fait les mêmes que les distances réelles M'a'', M'e' du point correspondant M' à la méridienne et à la perpendiculaire de A; que la différence se fera d'autant plus sentir sur un point quelconque de la chaîne qu'il sera plus éloigné du lieu de départ des axes, et qu'on aura passé par un plus grand nombre de triangles pour arriver jusqu'à lui.

72. Pour se soustraire aux erreurs que cette manière de calculer les distances à la méridienne et à la perpendiculaire des divers points d'un réseau trigonométrique finirait par entraîner, il faut avoir le soin de changer l'origine des coordonnées assez souvent pour que jamais ces erreurs ne deviennent supérieures à celles qui proviennent des observations.

Ainsi, lorsque la distance des points K, L, M... du réseau au point de départ A' (figure 22), sera de 70 à 80,000 mètres, on devra les rapporter à un autre, A, plus rapproché d'eux. Ce point, qu'on a toujours soin de prendre parmi ceux de la triangulation principale, est supposé déterminé géographiquement en fonction de A' par les formules de l'article 110, ainsi que l'azimut du côté AH sur son horizon; on a par conséquent toutes les données nécessaires pour obtenir les distances des points tels que H, L, K à la nouvelle méridienne et à la nouvelle perpendiculaire.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

73. Si l'on avait besoin de connaître par rapport aux nouveaux axes AX, AY (figure 22), quelques-unes des positions H, I, F, E..., déterminées relativement aux anciens, on y parviendrait aisément sans passer par de longs calculs. Il suffirait d'ajouter aux logarithmes des côtés AH, AI, IF.... que l'on a déjà, ceux des sinus et cosinus de leurs gisements apparents par rapport au méridien de A.

Ces gisements se déduiraient de l'azimut supposé connu du côté AH sur l'horizon de A (article 71).

Par *gisement apparent* d'une droite NL, par exemple,

nous entendons l'angle qu'elle forme avec une parallèle menée en N ou en L à la méridienne A Y du point A.

* Ce procédé est préférable au suivant où entrent les coordonnées de l'origine des anciens axes.

Supposons qu'un point B (figure 21) soit déterminé relativement aux axes A'X', A'Y', par ses distances $BF = x'$, $BG = y'$, et qu'on veuille ses coordonnées $AC = x$, $AD = y$ par rapport aux nouveaux axes A X, A Y. On mènera par le point A deux parallèles aux anciens axes, puis du point C', où l'ordonnée BG rencontre l'axe des X', on abaissera une perpendiculaire sur chacune des lignes BC, AX; cela posé, si l'on nomme α l'inclinaison des méridiens de A et de A', ou leur *convergence*, p, q l'abscisse et l'ordonnée de A par rapport à A', qu'on regarde comme positives les coordonnées des points situés au nord et à l'est de A, et qu'on compte aussi positivement l'angle α en allant du nord vers l'est, on aura :

$$x = AC = C'H + AE = (y'-q)\sin\alpha + (x'-p)\cos\alpha,$$
$$y = BC = BH - C'E = (y'-q)\cos\alpha - (x'-p)\sin\alpha.$$

Lorsque l'axe A Y' sera à l'ouest au lieu d'être à l'est de A Y, c'est-à-dire quand la nouvelle origine sera à l'ouest de l'ancienne, alors α sera négatif dans les formules précédentes. L'expression générale de la valeur de ce petit angle sera donnée à l'article 111.

CALCUL D'UN POINT PAR LA STATION.

74. — Il est souvent nécessaire de connaître avec exactitude, surtout en mer, la position d'un lieu relativement à d'autres qui sont déterminés par leurs distances respectives

ou par leurs coordonnées rectangulaires. A cet effet on construit (figure 23) sur les lignes AB, AC, qui joignent trois points A, B, C relevés avec un théodolite ou un instrument à réflexion, des segments capables des angles observés O et O′ (article 19); l'intersection de ces circonférences donne graphiquement la position du point O dont il s'agit de calculer la distance et le gisement par rapport à A. Pour y parvenir on tirera d'abord des triangles rectangles ABD, ACE les longueurs des hypoténuses au moyen des équations

$$b = \frac{m}{\sin O}, \qquad b' = \frac{m'}{\sin O'},$$

puis on résoudra le triangle DAE, où l'on connaît actuellement les côtés b, b' et l'angle compris

$$\alpha = BAC - \{180^\circ - (O + O')\}.$$

On en déduira les angles δ, δ' par les relations

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = \frac{b' - b}{b' + b} \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Enfin de ces données on tirera :

$$AO = D = b \sin \delta = b' \sin \delta',$$

$$OAY = Z = BAY + (O + \delta) - 180^\circ = 180^\circ - (O' + \delta' + YAC),$$

et par suite les distances du point O à la méridienne et à la perpendiculaire de celui auquel sont rapportés A, B, C.

Il est aisé de voir que l'exactitude des résultats fournis par ces divers calculs dépend de la grandeur des angles observés O, O′. Ainsi il y aura un certain choix à faire parmi les signaux qu'on apercevra d'un point dont on voudra déterminer la position par le procédé actuel.

Quand les longueurs AB, AC ne sont pas données di-

rectement, ainsi que l'angle BAC, on les détermine à l'aide de leurs coordonnées rectangulaires.

Pour vérifier la distance D on la calculera de nouveau avec B, A et un quatrième point, puis on prendra la moyenne des résultats.

Si l'on veut avoir le *gisement vrai* du point O par rapport à A, il faudra corriger le gisement Z, trouvé par ce calcul, de l'inclinaison du méridien de A sur celui du lieu à partir duquel on compte les coordonnées. Dans le cas actuel on voit qu'on devrait ajouter à Z le petit angle α'. La page 205 contient un exemple de ces calculs.

Il est bon de déterminer ainsi, par leurs gisements vrais et leurs distances aux points remarquables d'une côte, les basses principales de dessus lesquelles on a pris des vues.

Les angles O et O' devront à la rigueur être réduits à l'horizon avant d'être employés dans les calculs, et pour faire cette réduction il faudra connaître la distance zénithale des points A, B, C (article 63).

Lorsque les observations auront été faites à la mer avec un cercle à réflexion, la distance zénithale à employer sera représentée par $z = 90^o - h$, h désignant la *hauteur angulaire vraie* du signal au-dessus de l'horizon. On trouvera à l'art. 93 la valeur de h en fonction de la hauteur apparente observée.

Cependant on pourra généralement se dispenser de réduire à l'horizon les angles observés, s'ils sont un peu grands et si en même temps l'un des signaux qu'on pourra prendre pour départ se trouve très-près de l'horizon (page 91).

S'il s'agissait de déterminer la position d'un point situé près d'une côte très-élevée, au lieu de prendre les angles sous lesquels on aperçoit les distances comprises entre les

signaux placés sur son sommet et les éléments nécessaires pour les réduire à l'horizon, on pourrait mesurer les angles horizontaux compris entre les points du pied de la côte qui se trouvent dans les plans verticaux menés par l'œil et le sommet des signaux; ces points s'obtiendront aisément à l'aide d'un fil à plomb. Ce procédé sera toujours assez exact; car il suffit, pour le but qu'on se propose dans ces sortes d'observations, d'avoir les angles à une minute près.

CALCUL DE LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX POINTS CONNUS PAR LEURS COORDONNÉES RECTANGULAIRES, OU, POUR PARLER CORRECTEMENT, PAR LEURS DISTANCES À LA MÉRIDIENNE D'UN LIEU ET PAR CELLES DES PIEDS DE CES PERPENDICULAIRES À CE MÊME LIEU.

75. La distance de deux points connus par leurs coordonnées rectangulaires s'obtient en résolvant le triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit la différence ou la somme des coordonnées de ces points. Cette approximation suffit pour l'usage qu'on fait de ces distances, qui sont toujours peu considérables. Il est d'ailleurs assez inutile de chercher une méthode rigoureuse pour les calculer, puisque les données d'où l'on part sont fautives.

* Voici cependant la marche que l'on devrait suivre en supposant exactes les coordonnées de chaque point, considéré comme situé sur une sphère dont le rayon aurait pour longueur la grande normale qui correspond à leur latitude moyenne (page 159).

Soient A′ A″ ces deux points (figure 24), $A'B = x'$, $BA = y'$ les coordonnées du premier par rapport au point A dont H et P représentent la latitude et la longitude; $A''B' = x''$, $B'A = y''$ celles du second. Si l'on mène les mé-

ridiens P A', P A'', on formera deux triangles sphériques rectangles PBA', PB'A'', dans lesquels les deux côtés de l'angle droit sont connus. Leur résolution déterminera les côtés b, b' et l'angle A'PA'' du triangle A'A''P. Celui-ci, où l'on connaît actuellement deux côtés et l'angle compris, fournira le troisième côté u qu'il s'agissait d'obtenir; on le convertira en mesures linéaires en multipliant par $\varrho' \sin 1''$ sa valeur exprimée en secondes, ϱ' désignant la longueur de la grande normale dont nous avons parlé; sa valeur sera donnée par la table V.

Ainsi les équations qui résolvent complétement notre problème sont les suivantes :

$$\cos b = \sin(H+y')\cos x', \qquad \tang P' = \frac{\tang x'}{\cos(H+y')},$$
$$\cos b' = \sin(H+y'')\cos x'', \qquad \tang P'' = \frac{\tang x''}{\cos(H+y'')},$$
$$\cos u = \cos b \cos b' + \sin b \sin b' \cos(P'-P'').$$

Pour se débarrasser des cosinus des petits angles, x', x'', $P'-P''=p$, et u dont les logarithmes ne sont pas donnés assez exactement par les tables, on les remplacera par leurs valeurs en fonction du sinus de la moitié de l'arc, puis après les réductions on prendra les logarithmes dans chaque membre; on obtiendra alors, au moyen des relations (D') de la page 15, les formules suivantes, dans lesquelles le module M a pour logarithme 9,6377843 :

$$\log \cos b = \log \sin(H+y') - 2M\sin^2\tfrac{1}{2}x'\left(1+\sin^2\tfrac{1}{2}x'\right),$$
$$\log \cos b' = \log \sin(H+y'') - 2M\sin^2\tfrac{1}{2}x''\left(1+\sin^2\tfrac{1}{2}x''\right),$$
$$\tang P' = \frac{\tang x'}{\cos(H+y')},$$
$$\tang P'' = \frac{\tang x''}{\cos(H+y'')},$$

$$2\log\sin\tfrac{1}{2}u = \log\sin b\sin b'\sin^2\tfrac{1}{2}p + M\left\{\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}(b'-b)}{\sin b\sin b'\sin^2\frac{1}{2}p}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}(b'-b)}{\sin b\sin b'\sin^2\frac{1}{2}p}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}(b'-b)}{\sin b\sin b'\sin^2\frac{1}{2}p}\right)^3 - \ldots\ldots\right\},$$

$$K = u''\,\varrho'\sin 1''.$$

Avant de les employer, il faudra diviser les distances linéaires x', y', x'', y'' par $\varrho'\sin 1''$, afin de les transformer en arcs. A cet effet on devra à la rigueur prendre pour $\log\frac{1}{\rho'\sin 1''}$ le nombre qui dans les tables V correspond à la latitude $\left(90^\circ - \frac{b+b'}{2}\right)$; mais, comme les angles b, b' ne sont pas connus dès le commencement de l'opération, il faudra d'abord les calculer approximativement en prenant le $\log\frac{1}{\rho'\sin 1''}$ qui convient à la latitude H du point de départ; avec leurs valeurs ainsi obtenues on cherchera celui qui est relatif à $\left(90^\circ - \frac{b+b'}{2}\right)$, puis on s'en servira pour convertir les coordonnées linéaires en arcs; après quoi on suivra la marche des calculs indiqués par les formules ci-dessus.

L'exemple suivant, où l'on a supposé pour plus de simplicité les points situés sur une sphère qui a pour rayon la grande normale sous la latitude de 45°, montrera qu'on peut toujours éviter tous ces longs calculs lorsqu'on veut obtenir la distance de deux points connus par leurs coordonnées rectangulaires; d'ailleurs jamais on n'aura à opérer sur des nombres aussi considérables que ceux d'où nous sommes partis.

$x' = 222{,}968^m 8$ Ouest. $H = 47^\circ\ 0'\ 0''$ Nord. $x'' = 158{,}956^m 1$ Est.
$y' = 189{,}769,\ 8$ Nord, Rayon de la sphère $= 6{,}387{,}589^m$ $y'' = 224{,}564,\ 7$ Nord.

CONVERSION DES COORDONNÉES LINÉAIRES EN ARCS.

$\log \frac{1}{R \sin 1''} = 8{,}5090882$ .... $8{,}5090882$ .... $8{,}5090882$ .... $8{,}5090882$

$\log x' = 5{,}3482442$ $\log y' = 3{,}2782271$ $\log x'' = 5{,}2012772$ $\log y'' = 5{,}3513415$

$3{,}8573324$ $3{,}7873153$ $3{,}7103654$ $3{,}8604297$

$x' = 7200''0 = 2^\circ 0' 0''$ $y' = 6127''95 = 1^\circ 42' 7''95$ $x'' = 5132''93 = 1^\circ 25' 32''93$ $y'' = 7251''53 = 2^\circ 0' 51''53$

CALCUL DE L'ARC b.

$$H = 47^\circ\ 0'\ 0''$$
$$y' = 1^\circ\ 42'\ 7''95$$
$$H + y' = 48^\circ\ 42'\ 7''95$$

$\log \sin (H + y') = 9{,}8758074$ $2 \log \sin \frac{1}{2} x' = 6{,}4837106$ $2 \log \sin^2 \frac{1}{2} x' = 2{,}96742$
2^e terme $= -\ 26456$ $\log 2\,M = 9{,}9388143$ $\log 2\,M = 9{,}93881$

3^e terme $= -$ $8 \log 2^e$ terme $= 6{,}4225249$ $\log 3^e$ terme $= 2{,}90623$

$\log \cos b = 9{,}87554276$ .... $b = 41^\circ\ 20'\ 15''$

CALCUL DE L'ARC b'.

$$H = 47^\circ\ 0'\ 0''$$
$$y'' = 2^\circ\ 0'\ 51''53$$
$$H + y'' = 49^\circ\ 0'\ 51''53$$

$\log \sin (H + y'') = 9{,}8778742$ $2 \log \sin \frac{1}{2} x'' = 6{,}1897962$ $2 \log \sin^2 \frac{1}{2} x'' = 2{,}37959$
2^e terme $= -\ 13447$ $\log 2\,M = 9{,}9388143$ $\log 2\,M = 9{,}93881$

3^e terme $= -$ $2 \log 2^e$ terme $= 6{,}1286105$ $\log 3^e$ terme $= 2{,}31840$

$\log \cos b' = 9{,}87773971$ .... $b' = 41^\circ\ 0'\ 21''96$

CALCUL DE L'ANGLE P'.

$\log \text{tang } x' = 8{,}5450838$
$\log \cos (H + y') = 9{,}8195260$
$\log \text{tang } P' = 8{,}7255578 \quad P' = 3^\circ 1' 43''81$

CALCUL DE L'ANGLE P''.

$\log \text{tang } x'' = 8{,}3960299$
$\log \cos (H + y'') = 9{,}8168181$
$\log \text{tang } P'' = 8{,}5792118 \quad P'' = 2^\circ 10' 23''99$

CALCUL DE L'ARC u.

$\frac{b-b'}{2} = 0^\circ 9' 56''52$		$\frac{1}{2} p = \frac{P'+P''}{2} = 2^\circ 36' 3''90$
$\log \sin b = 9{,}8198683$	$2 \log \sin \left(\frac{b-b'}{2}\right) = 4{,}9223982$	
$\log \sin b' = 9{,}8169961$	$\log 1^{er}\text{ terme} = 6{,}9506295$	$\text{compl. } \log 2 = 9{,}6989700$
$2 \log \sin \frac{1}{2} p = 7{,}3137649$	$\log \frac{\sin^2 \left(\frac{b-b'}{2}\right)}{\sin b \sin b' \sin^2 \frac{p}{2}} = 7{,}9717689$	$2 \log \frac{\sin^2 \left(\frac{b-b'}{2}\right)}{\sin b \sin b' \sin^2 \frac{p}{2}} = 5{,}9435378$
$\log 1^{er}\text{ terme} = 6{,}9506295$	$\log M = 9{,}6377843$	$\log M = 9{,}6377843$
$2^e\text{ terme} = +40696$	$\log 2^e\text{ terme} = 7{,}6095552$	$\log 3^e\text{ terme} = 5{,}2802921$
$3^e\text{ terme} = -191$		$\text{compl. } \log 3 = 9{,}52288$
$4^e\text{ terme} = +1$		$3 \log \frac{\sin^2 \left(\frac{b-b'}{2}\right)}{\sin b \sin b' \sin^2 \frac{p}{2}} = 3{,}91530$
$2 \log \sin \frac{1}{2} u = 6{,}9546799$		$\log M = 9{,}63778$
$\log \sin \frac{1}{2} u = 8{,}4773399$	$\frac{1}{2} u = 1^\circ 43' 11''99$	$\log 4^e\text{ terme} = 3{,}07596$

$$u = 3^\circ 26' 23''98 = 12383''98.$$

CALCUL DE LA DISTANCE LINÉAIRE K.

$\log u = 4{,}0928604$
$\log R = 6{,}8053369$
$\log \sin 1'' = 4{,}6855749$
$\log K = 5{,}5837722$
$K = 383506^m{,}0.$

En considérant cette distance comme l'hypoténuse du triangle rectiligne rectangle qui a pour côtés de l'angle droit la somme des distances des deux points A', A'' à la méridienne de A, et la différence des distances de ces mêmes points à sa perpendiculaire, on trouverait :

$$K = 383506{,}8$$

CHAPITRE VII.

DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU.

76. Les observations et les calculs dont nous nous sommes occupés jusqu'ici n'avaient pour but que de déterminer une série de points les uns par rapport aux autres, ainsi que leurs coordonnées rectangulaires, relativement à deux axes fixes. Il nous reste, pour compléter tout ce qu'il importe de connaître sur leurs positions, à calculer leurs hauteurs respectives les uns au-dessus des autres, ou leur *différence de niveau*, et à déduire de ces mesures l'*altitude*, c'est-à-dire la hauteur absolue de chacun d'eux au-dessus de la surface sur laquelle la base et les triangles qui s'y rattachent ont été projetés (articles 38 et 99).

Quoique la terre ait la forme d'un ellipsoïde de révolution, on peut cependant toujours considérer le nivellement trigonométrique comme ayant lieu sur une sphère dont le rayon est égal à la normale comprise entre le point où l'on observe et la ligne des pôles. Le calcul démontre que les erreurs provenant de cette hypothèse sont presque toujours inférieures à celles qui sont inhérentes aux observations.

On dit que plusieurs points sont de *niveau* entre eux lorsqu'ils se trouvent tous sur une même surface semblable et concentrique à celle des eaux tranquilles de la mer. La distance d'un point à cette surface se mesure le long de la

verticale de ce point et exprime sa *hauteur absolue* ou sa *dépression* par rapport à elle.

Toute courbe tracée sur la terre supposée sphérique est une ligne de *niveau vrai*, et toute droite perpendiculaire à la direction de la pesanteur est une ligne de *niveau apparent*.

NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE.

1°. *Par des distances zénithales réciproques et simultanées.*

77. Les principes précédents étant posés, soient A et B (fig. 25) les sommets de deux signaux, C le centre de la terre supposée sphérique, CZ, CZ′ leurs verticales respectives, et $mon = K$ la distance de leurs projections sur la sphère où se trouve la base d'où l'on est parti pour calculer leurs positions.

Si l'on connaissait les distances zénithales ZAB, Z′BA et la corde $AD = K'$ de l'arc qui passe par le point A, on pourrait déterminer la hauteur BD du second au-dessus du premier; car le triangle BAD donne:

$$(A) \qquad BD = dN = \frac{K' \sin BAD}{\sin ABD} = \frac{K' \sin (ZAB + DAC)}{\sin Z'BA}.$$

Il ne s'agit donc que d'obtenir les valeurs des diverses quantités qui entrent dans cette équation.

La réfraction fait, comme on sait, paraître les objets plus élevés qu'ils ne le sont réellement; par conséquent les distances zénithales $ZAB' = \delta$, $Z'BA' = \delta'$, *supposées prises aux sommets des signaux* A et B, diffèrent des distances vraies des quantités $B'AB = r$, $A'BA = r'$; d'où il résulte que celles-ci sont :

$$ZAB = \delta + r, \qquad Z'BA = \delta' + r',$$

et donnent pour somme :

$$ZAB + Z'BA = \delta + \delta' + r + r' = 180° + C,$$

C désignant l'angle formé par les verticales des points A et B.

Si les observations sont *réciproques* et *simultanées*, on pourra admettre que $r = r'$ parce que les circonstances atmosphériques qui influent sur ces petits angles seront les mêmes; on déduira alors de l'équation précédente :

$$r = 90° + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta'),$$

et cette quantité introduite dans les expressions des angles ZAB, Z'BA donnera pour leurs valeurs :

$$ZAB = \delta + r = 90° + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta),$$
$$Z'BA = \delta' + r' = 90° + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

D'un autre côté, le triangle isocèle ACD fournit la relation

$$DAC = 90° - \tfrac{1}{2}C;$$

on aura donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (A) :

$$dN = \frac{K' \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}.$$

Si, au lieu de la corde AD qui passe par le point A, on avait employé celle de l'arc BD' mené par le point le plus élevé, on aurait trouvé :

$$dN = \frac{K'' \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta - C)}.$$

Pour réunir ces deux formules en une seule, nous écrirons :

$$dN = \frac{K' \sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta'-\delta\pm C)}.$$

Celle-ci devient, après qu'on a développé le dénominateur, qu'on a réduit et effectué la division :

(B) $$dN = \frac{K' \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\cos\frac{1}{2}C}\left(1 \pm \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\right).$$

Il faudra se rappeler que le signe + convient au cas où K′ représente la longueur de la corde qui sous-tend l'arc mené par le moins élevé des deux points, et que δ désigne la distance zénithale qui y a été observée ; d'après ces conventions, le facteur $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$ sera toujours positif.

Si l'on observe que, vu la petitesse de l'angle C, on peut poser $\cos\frac{1}{2}C = 1 - \frac{C^2}{8}$ et $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}C$, on aura, en prenant les logarithmes de part et d'autre, puis réduisant au moyen des équations (D′) de la page 15 :

(C) $$\log dN = \log K' + \log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) + \frac{M}{8}C^2 \pm \frac{M}{2}C \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta).$$

78. Cherchons maintenant à exprimer la distance K′ en fonction de l'arc $mon = K$ qui mesure, sur l'ellipsoïde où l'on a projeté la base et les sommets des triangles du réseau, la distance linéaire des deux points A et B. Or, si l'on mène la corde mn, qu'on désigne par ρ' la longueur de la grande normale à la latitude du point A (page 152), et par h la hauteur absolue de ce point au-dessus de la surface sphérique dont cette normale est le rayon, on aura :

$$AD = K' = \frac{\rho' + h}{\rho'}\, mn.$$

Mais la corde $mn = 2\,mi = 2\rho' \sin\frac{C}{2} = \rho' C\left(1 - \frac{C^2}{24}\right)$

$= K\left(1 - \frac{K^2}{24\rho'^2}\right)$, en remplaçant l'arc C par sa valeur $\frac{K}{\rho'}$ en parties du rayon; donc

$$K' = K\left(1 + \frac{h}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{K^2}{24\rho'^2}\right).$$

On tire de là, au moyen des formules (D') de la page 15, en négligeant les termes en h^2 et les puissances de $\frac{K}{\rho'}$ supérieures à la deuxième :

$$\log K' = \log K + \frac{M}{\rho'}h - \frac{M}{24\rho'^2}K^2.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (c) la transformera dans la suivante, après qu'on aura remplacé l'arc C par $\frac{K}{\rho'}$ et réduit :

$$(1)\quad \log dN = \log\left(K \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\right) + \frac{M}{\rho'}h \pm \frac{M}{2\rho'}K \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) + \frac{M}{12\rho'^2}K^2.$$

(Voir l'article 156, pour une application de cette formule.)

2° Au moyen d'une seule distance zénithale.

79. Si l'on remplace dans l'équation (1), $\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ par sa valeur tirée de la relation

$$\delta + r = 90° + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta),$$

il viendra :

$$\log dN = \log \frac{K}{\operatorname{tang}(\delta + r - \frac{1}{2}C)} + \frac{M}{\rho'}h \pm \frac{M}{2\rho'} \frac{K}{\operatorname{tang}(\delta + r - \frac{1}{2}C)} + \frac{M}{12\rho'^2}K^2.$$

En faisant $r = 90° + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta' + \delta) = nC = n\frac{K}{\rho' \sin 1''}$, conformément à la théorie de la réfraction, de laquelle il résulte que le petit angle r est proportionnel à celui

que comprennent les verticales des points A et B, on aura enfin :

$$(2)\quad \log dN = \log \frac{K}{\tan\left(\delta - \frac{1-2n}{2}C\right)} + \frac{M}{\rho'} h \pm \frac{M}{2\rho'} \frac{K}{\tan\left(\delta - \frac{1-2n}{2}C\right)} + \frac{M}{12\rho'^2} K^2.$$

Nous apprendrons bientôt à déterminer la valeur de la quantité constante *n* qui entre dans cette formule.

(On en trouvera une application à l'article 158.)

3° Par la distance zénithale de l'horizon de la mer.

80. Si du point B (figure 28) on aperçoit l'horizon de la mer, on pourra déterminer la hauteur BB′ par la seule observation de la distance zénithale ZBA′ de cet horizon, A′ désignant la position apparente du point A produite par la réfraction. Pour y parvenir, menons le rayon AC et désignons-le par ρ'. Le triangle rectangle BAC donnera :

$$BC \text{ ou } \rho' + BB' = \frac{\rho'}{\cos C},$$

d'où

$$BB' = \frac{\rho'(1-\cos C)}{\cos C}.$$

Or,

$$1 - \cos C = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$

et

$$\cos C = \cos^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

donc, en substituant ces valeurs et effectuant la division, il viendra :

$$BB' = 2\rho' \tan^2 \tfrac{1}{2} C \,(1 + \tan^2 \tfrac{1}{2} C).$$

Si l'on prend l'arc exprimé en parties du rayon pour la tangente, ce qui est bien permis, car cette hypothèse ne

produirait qu'une erreur d'un mètre sur une élévation de 4,600, l'altitude cherchée aura pour expression :

$$A = \frac{\rho'}{2} C^2 \left(1 + \frac{C^2}{4}\right).$$

L'angle C a pour valeur HBA'+A'BA$=\delta - 90° + nC$, d'où $C = \frac{\delta - 90°}{1-n}$. Avant de l'introduire dans notre formule, il faut le multiplier par sin 1″ afin de convertir l'arc $\frac{\delta - 90°}{1-n}$ en parties du rayon ; on a alors

(D) $$A = \tfrac{1}{2}\rho' \left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 (\delta - 90°)^2 \left\{1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 (\delta - 90°)^2\right\}.$$

et par suite, au moyen des logarithmes et des équations (D′) de la page 15 :

(3) $$\log \text{altitude} = \log \frac{\rho'}{2}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 + \log(\delta - 90°)^2 + \frac{M}{4}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 (\delta - 90°)^2.$$

81. On pourrait, en s'appuyant sur cette formule, et au moyen de distances zénithales, déterminer assez exactement les limites d'un plateau de roches, ou d'un banc de sable, sur lesquels se trouverait une tour d'une élévation convenable. En effet, on prendrait d'abord plusieurs séries de la distance zénithale de l'horizon de la mer, au moment de la basse mer, puis ensuite on observerait (fig. 29) les distances zénithales ZOA$=\delta$, ZOB$=\delta'$..... des divers points dont l'ensemble forme la limite du plateau ABCD....., ainsi que les angles SO′A, SO′B....., que font les projections horizontales des plans verticaux ZOA, ZOB.... avec un signal connu S. (Ils se liront sur le limbe inférieur du théodolite ou du cercle répétiteur.)

Cela posé, de la distance zénithale de l'horizon de la mer.

on déduira, au moyen de la formule précédente, la hauteur $OO' = h$ de l'instrument au-dessus du niveau de l'eau pour le moment de l'observation; les triangles rectangles $OO'A$, $OO'B$... donneront ensuite $AO' = h \tang (180° - \delta)$, $BO' = h \tang (180° - \delta')$; enfin, avec ces longueurs calculées et les angles observés $SO'A$, $SO'B$.... on aura toutes les données nécessaires pour construire graphiquement sur le plan de construction la limite ABCD.... du plateau à l'instant de la basse mer. Ce procédé sera d'autant plus rigoureux que l'élévation de la tour sera plus considérable et que sa hauteur au-dessus du niveau de la mer sera connue plus exactement; aussi sera-t-il plus convenable de la déduire d'un nivellement géodésique.

CORRECTIONS DIVERSES QUE DOIVENT SUBIR LES DISTANCES ZÉNITHALES OBSERVÉES AVANT D'ÊTRE EMPLOYÉES DANS LES CALCULS.

1° *Réduction des distances zénithales aux sommets des signaux et mesure de la hauteur de ces sommets au-dessus de l'instrument.*

82. Comme dans la pratique on observe au-dessous des sommets des signaux en a, b (fig. 25), les distances zénithales δ, δ' ne sont pas données immédiatement; or, si l'on appelle Δ, Δ' celles qui ont été observées en ces points, on aura :

$$ZAB' = ZaB' + AB'a = \Delta + d\Delta,$$
$$Z'BA' = Z'bA' + BA'b = \Delta' + d\Delta'.$$

Si l'on désigne actuellement par dH, dH' les hauteurs Aa, Bb du sommet de chaque signal au-dessus du centre de l'instrument, et si l'on observe que $AB' = AD = K' = K$ à très-peu près, on aura par le triangle $AB'a$:

$$\sin d\Delta = \frac{dH \sin \Delta}{K},$$

d'où, en secondes,

$$d\Delta = \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''},$$

et par suite,

$$\delta = \Delta + \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''}.$$

On aurait de même :

$$\delta' = \Delta' + \frac{dH' \sin \Delta'}{K \sin 1''}.$$

83. On ne peut pas toujours mesurer directement la hauteur dH du sommet du signal au-dessus du centre de l'instrument; les moyens à employer pour l'obtenir dépendent de la forme de l'édifice sur lequel on observe. S'il est terminé par une flèche conique ou octogonale, et qu'on soit en B, figure 26, on fera deux sections ab, cd parallèles et horizontales, puis on mesurera les diamètres $2R$, $2r$ du cône circonscrit à la pyramide, ainsi que la distance h qui les sépare; alors, en désignant par dH l'élévation SB de la flèche au-dessus de la première section supposée faite à la hauteur de l'instrument, on aura :

$$\frac{R}{r} = \frac{dH}{dH - h},$$

d'où

$$dH = \frac{hR}{R - r}.$$

Si, au lieu de mesurer la distance h entre les deux sections, ce qui est quelquefois assez difficile, on avait pris la longueur $ac = l$ de la partie de l'arête comprise entre elles, alors la valeur de dH serait (page 22) :

$$dH = \frac{R}{R-r}\left\{\left(l+(R-r)\right)\left(l-(R-r)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Les rayons R et r s'obtiendront en mesurant les circonférences des deux sections, si la flèche est conique, ou bien ils se déduiront des équations de la page 21, dans lesquelles on mettra pour a, a' les longeurs des côtés des polygones réguliers de ces sections, si elle est pyramidale.

Lorsque la flèche est très-aiguë, la méthode précédente n'est plus assez exacte, parce qu'une légère erreur dans la mesure des longueurs R, r et h ou l peut en apporter une très-notable dans celle de dH; on a recours alors au procédé suivant dont Delambre a fait usage plusieurs fois : soit (figure 26) B le lieu de la galerie du clocher où était placé l'instrument, lorsqu'on a pris la distance zénithale Z'BA du signal A, duquel on a observé les angles ZAB, ZAS dont la différence fait connaître l'angle A; si du point B on abaisse sur la droite AS la perpendiculaire BI, on formera deux triangles rectangles BIS, BIA, desquels on tirera la relation

$$BI = BS \sin S = AI \tang A,$$

qui fournira pour BS, ou dH, l'expression suivante :

$$dH = \frac{AI \tang A}{\sin S}.$$

On a à fort peu près, vu l'extrême petitesse de l'angle A :

AI = AB = K (distance connue des deux signaux A et B), et

$$S = 180° - Z'BA.$$

Si l'on met dans cette dernière équation pour Z'BA sa valeur donnée plus haut (page 111), elle deviendra :

$$S = 90° - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta + C).$$

Si l'on substitue actuellement ces diverses quantités dans l'expression ci-dessus de dH, on la transformera dans la suivante :

$$dH = \frac{K \tang A}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}.$$

Ainsi, il suffira de prendre les distances zénithales δ, δ'' δ' des points B, S, A, et d'exprimer C en secondes au moyen de la valeur de l'arc K qu'il comprend, c'est-à-dire en posant $C = \frac{K}{\rho' \sin 1''}$.

2° Réduction des distances zénithales au centre de la station.

84. Les distances zénithales Δ, Δ', qui entrent dans les équations

$$\delta = \Delta + \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''}, \qquad \delta' = \Delta' + \frac{dH' \sin \Delta'}{K \sin 1''},$$

sont censées observées au centre de chaque signal; or, généralement cela n'a pas lieu; il faut donc à la rigueur leur appliquer une petite correction avant de s'en servir dans les formules données plus haut. Supposons (figure 27) que O soit le point d'où l'on a observé l'angle $ZOB = \Delta$, et que A', B' soient ceux où les verticales des signaux A et B rencontrent le plan horizontal OA'B'. Si l'on abaisse du point A' une perpendiculaire sur OB', et qu'en O' on mène la verticale $O'Z_{\prime}$, on aura, en appelant Δ_1 l'angle $Z_{\prime}O'B$:

$$\Delta_1 = \Delta - \beta;$$

mais le triangle OBO' donne en supposant $O'B = A'B' = K$:

$$\frac{\sin \beta}{\sin BOO'} = \frac{OO'}{O'B},$$

d'où

$$\beta = \frac{OO' \cos \Delta}{K \sin 1''};$$

d'un autre côté on a par le triangle rectangle OO'A' :

$$OO' = r \cos y,$$

r désignant la distance du point de station au centre du signal, et y l'angle compris entre le point qu'on observe et ce même centre; par conséquent, la distance zénithale réduite sera :

$$\Delta_1 = \Delta - \frac{r \cos y \cos \Delta}{K \sin 1''}.$$

On prendra cette valeur pour celle de la distance zénithale vraie $Z_{\prime\prime}A'B$, parce que dans tous les cas possibles, on pourra supposer égales entre elles les distances O'B', A'B', hypothèse d'où résulte l'égalité des triangles O'B'B, A'B'B.

Pour faire usage de cette formule, on se rappellera que y se compte de 0° à 360°, en allant du point qu'on observe, vers la gauche; mais très-rarement on se trouvera dans la nécessité d'y avoir recours.

Distance et différence de niveau de deux points dont on a mesuré les distances zénithales.

85. On a à peu près (figure 25), $AB = AD = 2\rho' \sin \frac{C}{2}$, ρ' désignant le rayon AC; de plus, l'équation

$$nC = 90° + \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta),$$

donne :

$$C = \frac{180° - (\delta' + \delta)}{2n - 1},$$

d'où

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta' + \delta)}{2n - 1},$$

à cause de la petitesse de l'angle $\frac{C}{2}$. Mettant cette valeur dans celle de K, on a pour cette distance :

$$K = \frac{2\rho'}{2n-1}\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta),$$

et cette quantité substituée dans l'équation (B) de la page 112, où l'on se borne au premier terme, en supposant de plus $\cos\frac{C}{2} = 1$, donnera pour la différence de niveau :

$$dN = \frac{2\rho'}{2n-1}\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Il est inutile d'ajouter que l'on devra fort peu compter sur l'exactitude des résultats obtenus par ce procédé.

Calcul de la distance zénithale d'un point au moyen de sa distance linéaire, de sa différence de niveau et de sa distance zénithale par rapport à un autre point.

86. De l'équation (B), où l'on suppose connues les quantités K, dN et δ, on tire, en négligeant la seconde puissance de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$; ce qui est permis à cause de la petitesse de l'angle $\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \frac{dN}{K}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

et par suite, pour la valeur en secondes de $(\delta' - \delta)$, en prenant l'arc pour la tangente et remplaçant $\cos\frac{1}{2}C$ par sa valeur $1 - \frac{K^2}{8\rho'^2}$:

$$\delta' - \delta = 2\,\frac{dN}{K\sin 1''}\left(1 - \frac{K^2}{8\rho'^2}\right),$$

d'où

$$\log(\delta' - \delta) = \log 2 \left(\frac{dN}{K \sin 1''}\right) - \frac{M}{8\rho'^2} K^2.$$

On aura alors, en représentant par α le nombre qui correspond à cette quantité : $\delta' = \delta + \alpha$.

CALCUL DU COEFFICIENT DE LA RÉFRACTION.

87. Le coefficient n de la réfraction qui entre dans quelques-unes des formules précédentes se détermine en observant les distances zénithales *réciproques* et *simultanées*, si cela est possible, de deux signaux dont la distance K est bien connue, et en les introduisant dans l'équation

$$n = \frac{90^\circ + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta' + \delta)}{C}$$

de l'article 79, après toutefois les avoir réduites aux sommets des signaux.

On l'obtiendrait encore en prenant la distance zénithale de l'horizon de la mer en un lieu dont l'altitude est bien exactement connue; car de l'équation (D), page 115, on tire, en négligeant le second terme, qui est toujours extrêmement petit :

$$n = 1 - \sin 1''(\delta - 90^\circ)\sqrt{\frac{\rho'}{2A}}.$$

On ne devra pas cependant accorder une grande confiance à ce procédé, parce qu'il est peu probable que les circonstances atmosphériques soient les mêmes aux deux extrémités du rayon visuel.

Des observations multipliées ont donné pour ce coefficient $n = 0{,}08$. Sa valeur est fortement influencée par di-

verses circonstances, telles que la température et la pression atmosphérique, dont on ne peut tenir aucun compte dans le calcul. En l'adoptant, faute d'observations particulières dans les localités où l'on se trouve, on voit que toute distance zénithale doit être augmentée des *huit centièmes de l'amplitude de l'arc compris entre les verticales du lieu de station et du point observé.*

CALCUL DE LA DÉPRESSION VRAIE DE L'HORIZON.

88. On nomme *dépression vraie* l'angle HBA (figure 28), compris entre l'horizontale BH et la tangente BA à la surface terrestre; il est, comme on voit, égal à celui que forment les verticales qui passent par le point de station B et le point de tangence A.

Or, le triangle rectangle BAC donne, en appelant ρ' le rayon AC de la terre et A la hauteur BB' :

$$\cos C = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{A}{\rho' + A},$$

d'où

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2} \frac{A}{\rho' + A}.$$

Comme l'angle C est toujours très-petit, on peut prendre l'arc pour le sinus, et poser :

$$\frac{C^2}{4} = \tfrac{1}{2} \frac{A}{\rho' + A} = \tfrac{1}{2} \frac{A}{\rho'} \left(1 - \frac{A}{\rho'}\right).$$

De là on tire, par l'extraction de la racine carrée et en divisant par sin 1″ pour avoir en secondes cet arc qui est exprimé en parties du rayon :

$$\text{Dépression vraie ou } C = \frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2A}{\rho'}\left(1 - \frac{A}{\rho'}\right)};$$

ou bien, avec les logarithmes,

$$\log \text{Dépression vraie} = \log\left(\frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2}{\rho'}}\right) + \tfrac{1}{2}\log A - \frac{M}{2\rho'}A.$$

CALCUL DE LA DÉPRESSION APPARENTE DE L'HORIZON.

89. La *dépression apparente* est l'angle formé par l'horizon *sensible* BA' du point B avec son horizon *vrai* BH. Il a pour valeur :

$$HBA' = C - nC;$$

par conséquent,

$$\text{Dép. apparente} = (1-n) \times \text{Dép. vraie} = \frac{1-n}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2A}{\rho'}\left(1 - \frac{A}{\rho'}\right)};$$

ou bien, pour le calcul,

$$\log \text{Dépression apparente} = \log\left(\frac{1-n}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2}{\rho'}}\right) + \tfrac{1}{2}\log A - \frac{M}{2\rho'}A.$$

C'est la quantité qu'il faut retrancher d'une hauteur d'astre prise en mer pour avoir sa distance angulaire à l'*horizon vrai* du lieu où l'on se trouve, abstraction faite de l'effet produit sur lui par la réfraction astronomique; A représente dans ce cas l'élévation de l'œil de l'observateur au-dessus du niveau de la mer.

90. L'expérience montre que la dépression apparente est très-variable pour une même hauteur : aussi on a imaginé divers instruments pour en obtenir la mesure directe; mais malheureusement ils donnent, même dans les circonstances les plus favorables aux observations, des résultats qui

diffèrent souvent entre eux de plus d'une minute. Ce fait a été constaté plusieurs fois sur les côtes de l'Algérie par MM. Bérard et de Tessan, lorsqu'ils ont voulu comparer entre elles des observations faites successivement avec les dépressiomètres de Borda et de Wollaston.

MESURE DE L'ÉTENDUE DE L'HORIZON D'UN LIEU AU MOYEN DE LA DISTANCE ZÉNITHALE DE L'HORIZON DE LA MER, OU EN FONCTION DE SON ALTITUDE.

91. Si l'on désigne par K la grandeur en unités linéaires de l'arc C (figure 28), exprimé en secondes, on aura $K = C\rho' \sin 1''$; mais, en vertu de ce qui précède,

$$C = \frac{\text{Dépression apparente}}{1-n} = \frac{\delta - 90^\circ}{1-n};$$

donc

$$\text{Étendue de l'horizon ou } K = \frac{\delta - 90^\circ}{1-n}\,\rho' \sin 1'',$$

équation où il suffira de remplacer δ par la distance zénithale qu'on aura observée.

92. Si l'on multiplie par $\rho' \sin 1''$ l'expression de la dépression vraie, afin de la convertir en unités linéaires, on aura, pour l'étendue de l'horizon en fonction de l'altitude A :

$$\text{Étendue de l'horizon} = C = \sqrt{2\,A\,\rho'\left(1 - \frac{A}{\rho'}\right)},$$

et pour le calcul,

$$\log \text{Étendue de l'horizon} = \log \sqrt{2\rho'} + \tfrac{1}{2} \log A - \frac{M}{2\rho'} A.$$

Ce sont ces diverses formules qui ont servi à calculer les nombres des tables III et IV.

DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR ABSOLUE D'UN LIEU PAR LE MOYEN DE SA DISTANCE ANGULAIRE À L'HORIZON DE LA MER ET SA DISTANCE LINÉAIRE AU POINT DE STATION.

93. Soit (figure 19) $GAB = h$ la hauteur angulaire du sommet d'une montagne au-dessus de l'horizon AH; si l'on décrit l'arc AB′ avec la distance AC du point A au centre de la terre, qu'on mène les verticales AC, CG, la corde AB′ et la perpendiculaire AF sur CB′, on aura, pour les valeurs des angles BAF, B′AF :

$$BAF = C, \qquad B'AF = \frac{C}{2},$$

et par suite, au moyen des triangles rectangles AFG, AFB′ :

$$B'G = FG - FB' = AF\left(\text{tang}\,(h+C) - \text{tang}\,\frac{C}{2}\right),$$

$$B'G = \frac{\rho' \sin C \sin\left(h + \frac{C}{2}\right)}{\cos\,(h+C)\cos\frac{C}{2}},$$

ρ' désignant le rayon AC; mais

$$\sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} C,$$

donc

$$BG' = 2\rho' \frac{\sin\left(h + \frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}}{\cos\,(h+C)}.$$

Par conséquent, pour se procurer l'altitude d'un lieu qu'on aperçoit du point A, situé à la mer, il faudra prendre avec un instrument à réflexion la hauteur angulaire $GAB'' = H$, la corriger de la *dépression apparente et de la réfraction*, puis

mettre pour h cette valeur corrigée dans l'équation précédente où l'on suppose que l'amplitude C de l'arc AB′ est donnée; on ajoutera ensuite à l'altitude calculée la hauteur $Aa = e$ de l'œil au-dessus de la surface de l'eau.

Les formules qui résolvent notre question sont donc les suivantes :

$$\text{Altitude} = e + 2\rho' \frac{\sin\left(h + \frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}}{\cos(h+C)},$$

h = Hauteur observée — (Dépression apparente + n C),

$$C = \frac{K}{\rho' \sin 1''};$$

K étant la longueur de l'arc A B′ exprimée en mesures linéaires, ρ' le rayon de courbure à la latitude du point A, et n le coefficient de la réfraction que l'on suppose généralement égal à 0,08.

94. Si la position du point G n'était pas connue, on déterminerait par des observations particulières celles de deux stations A et A′ situées à une distance convenable pour former avec la projection B′ de G un triangle A B′A′ bien conditionné, et on déterminerait en même temps l'azimut de ce point sur l'horizon de chacune d'elles; après les avoir placées sur la carte, on y marquerait à l'aide de ces relèvements la projection B′ du sommet dont on cherche la hauteur. L'altitude B′G se calculerait ensuite avec les distances A B′, A′B′ = K, qu'on aurait obtenues par ces constructions et à l'aide des hauteurs angulaires H, H′ observées à chacune des deux stations. Il faudra avoir le soin, avant d'employer les azimuts, de leur appliquer, si cela est nécessaire, la correction indiquée à l'article 140.

La moyenne des résultats ne sera jamais rigoureusement exacte, à cause des éléments défectueux d'où l'on part, et de l'incertitude qui existe sur la valeur du coefficient de la réfraction au moment des observations.

95. L'expérience a montré à MM. Bérard et de Tessan, pendant leur campagne le long des côtes de l'Algérie, que, sur des hauteurs de 1,300 mètres environ, l'erreur commise ne dépassait pas les $\frac{5}{100}$ de la hauteur réelle. On pourra donc encore avoir une idée assez exacte du relief des montagnes qui bordent une côte, en employant le procédé précédent pour déterminer les élévations de leurs principaux sommets.

96. Comme la distance du point de station à l'objet qu'on relève est toujours fort petite, on peut négliger $\frac{1}{2}$ C dans le dénominateur de l'équation ci-dessus et remplacer au numérateur $\sin\frac{C}{2}$ par son arc; elle prend alors cette forme très-simple en observant que $\varrho' C = K$:

$$\text{Altitude} = e + K \tan\left(h + \frac{C}{2}\right).$$

CALCUL DE LA HAUTEUR ABSOLUE D'UN LIEU PAR LE MOYEN DE SA DISTANCE ANGULAIRE AU PIED D'UNE CÔTE.

97. Lorsque l'horizon se trouve borné par la côte, on ne peut que mesurer l'angle GAD (figure 10) du sommet G avec l'origine D du rivage; alors la valeur de h qu'il faut employer dans les équations ci-dessus ne dépend plus de la dépression, mais bien de l'angle BAD $=$ I' qui représente,

abstraction faite de la réfraction, l'inclinaison du rayon visuel aboutissant au pied de la côte; on a alors:

$$h = \text{GAD} - \text{BAD}.$$

Pour obtenir la valeur de I', menons la corde aD et la tangente ad en a; de plus abaissons de D les perpendiculaires Da', Dd sur aC et ad, puis joignons A avec d; cela posé il est visible qu'on aura les relations:

$$\text{I}' = \text{AD}a' = \text{AD}a + a\text{D}a',$$
$$\text{AD}a = \text{A}da + \text{DA}d - \text{D}ad.$$

Les deux derniers angles de cette seconde égalité étant toujours extrêmement petits, on peut supposer, sans erreur sensible, A D a = A $d a$; par conséquent;

$$\text{I}' = \text{A}da + a\text{D}a'.$$

Or, si l'on pose Aa = e, aC = ρ', l'angle Ada sera donné par l'équation

$$\text{tang A}da = \frac{e}{a\text{D}} = \frac{e}{\rho' \sin \text{C}'};$$

d'où, vu sa petitesse, A d a = $\frac{e}{\rho' \sin \text{C}' \sin 1''}$. En substituant cette valeur dans celle de I', et observant que $a\text{D}a' = \frac{\text{C}'}{2}$ il viendra:

$$\text{I}' = \frac{e}{\rho' \sin \text{C}' 1''} + \frac{\text{C}'}{2};$$

mais la réfraction élève un peu le point D; il faut donc, pour avoir l'*inclinaison apparente* du rayon visuel A D, retrancher de cet angle l'effet qu'elle produit; on aura alors définitivement en secondes, en représentant toujours par n le coefficient de la réfraction:

$$\text{Inclinaison apparente} = \frac{e}{\rho' \sin C' \sin 1''} + \frac{1-2n}{2} C'.$$

L'arc C' se calculera avec l'équation $C' = \frac{K'}{\rho' \sin 1''}$, dans laquelle K' désigne la distance linéaire du point de station au pied de la côte; par suite la valeur de h, dont on devra faire usage dans le cas actuel, sera :

$$h = \left\{ \begin{array}{c}\text{Distance angulaire} \\ \text{du sommet au pied de la côte}\end{array} \right\} - (\text{Inclinaison apparente} + nC).$$

98. Pour évaluer l'inclinaison apparente, il faut connaître, comme on voit, outre la hauteur de l'œil au-dessus de la mer, la distance du point de station au rivage, exprimée en minutes ou secondes; on se procure ce second élément en traçant sur la carte le gisement de l'objet qu'on a observé; si le trait de la côte n'y était pas porté, on opérerait comme on l'a expliqué plus haut (article 94) lorsqu'il s'est agi d'avoir la position du sommet de la montagne.

ALTITUDE DES SIGNAUX ET DU SOL SUR LEQUEL ILS SONT ÉTABLIS.

99. Lorsqu'on emploie, pour calculer les différences de niveau, des distances zénithales réciproques observées à plusieurs reprises dans des circonstances favorables, il est possible d'obtenir pour les deux points extrêmes d'une triangulation du premier ordre des résultats exacts à 2 mètres près. Si l'on veut déduire de ces calculs les hauteurs absolues de tous les points du réseau au-dessus du *niveau moyen de l'Océan*, ou leurs *altitudes*, il faudra conduire la chaîne de triangles jusqu'au bord de la mer (figure 30). Là on prendra les distances zénithales réciproques des deux si-

gnaux S, s, afin d'en conclure la différence de niveau AB des points sur lesquels ils sont établis ; ensuite, au moyen d'une échelle divisée en fractions de mètre, on mesurera, à l'époque des grandes marées, les hauteurs ah, ab, ah' du point a au-dessus de deux hautes mers consécutives hh, $h'h'$ et de la basse mer intermédiaire bb. La moyenne de ces observations fera connaître la hauteur am du point a au-dessus du *niveau moyen* (article 22), et on en déduira pour l'altitude du sommet S au-dessus de ce plan :

$$h = SA + AB + am.$$

On aura donc toutes les données nécessaires pour calculer les hauteurs absolues de tous les autres sommets de la chaîne de triangles. En retranchant de chacune d'elles celle du signal, on obtiendra l'altitude du sol sur lequel il repose. Cette distance du sommet du signal à sa base est égale à $dH + dT$, dT représentant la hauteur de la lunette de l'instrument au-dessus du sol.

NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE.

100. On conçoit comment à l'aide d'un niveau d'eau ou à bulle d'air et d'une mire divisée (figure 32), le long de laquelle glisse à volonté une plaque a, on peut avoir la différence de niveau de deux points A et B non visibles l'un de l'autre. On fera une suite de stations, comme l'indique la figure 33, et à chacune d'elles on donnera deux coups de niveau, l'un en avant, l'autre en arrière; *la différence entre la somme des hauteurs correspondantes aux coups de niveau d'avant et celle des hauteurs relatives aux coups de niveau d'ar-*

rière fera connaître, suivant son signe, la hauteur ou l'abaissement du point de départ par rapport au point d'arrivée.

101. Lorsqu'on ne peut pas faire un nivellement composé, la différence de niveau observée entre deux points a besoin, si leur distance est supérieure à 5 ou 600 mètres, de subir une correction qui dépend de la sphéricité de la terre et de la réfraction.

Supposons, par exemple, qu'étant en A (fig. 31), on aperçoive, dans la direction de l'horizontale d'un niveau qui y est placé, le voyant B' d'une mire élevée en O. Si l'on décrit du centre C de la terre avec les rayons CA, CO, les arcs AF, Oa, on aura:

$$(1)\ \left\{\begin{array}{c}\text{Différence}\\ \text{de niveau vrai}\end{array}\right\} \text{ ou } OF = \left\{\begin{array}{c}\text{Différence}\\ \text{de niveau apparent}\end{array}\right\} \text{ ou } OB'-FB'.$$

Mais le voyant de la mire ne paraît en B' que par l'effet de la réfraction; par conséquent, la différence de niveau apparent qu'il fait connaître n'est qu'une certaine longueur OB; de sorte qu'on a:

$$OF = OB - FB = OB - (FB'-BB'),$$

c'est-à-dire,

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Différence}\\ \text{de niveau vrai}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Différence de niveau}\\ \text{apparent}\\ \text{donnée par la mire}\end{array}\right\} - \left\{\left(\begin{array}{c}\text{Correction}\\ \text{de}\\ \text{sphéricité}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Correction}\\ \text{de}\\ \text{réfraction}\end{array}\right)\right\}.$$

Calculons actuellement ces deux espèces de corrections:

1°. Du triangle rectangle B'AC, on tire, en admettant, ce qui est permis dans le cas actuel, que AB' = AF:

$$(CF + FB')^2 = \overline{CF}^2 + \overline{AF}^2;$$

d'où, en négligeant la seconde puissance de FB' dans le développement du binôme, et posant AF = K, CF = R :

$$\text{Correction de sphéricité} = \frac{K^2}{2R}.$$

Cette quantité représente, comme l'indique la relation (1), *la différence entre le niveau apparent et le niveau vrai de deux points*. Elle s'élèverait déjà à $0^m,314$ pour une distance de 2,000 mètres.

2°. Pour déterminer l'expression de BB', nous observerons que l'angle $FAB' = \frac{1}{2}C$, comme formé par une tangente et une corde, et que celui qui est produit par la réfraction a pour valeur $BAB' = r = nC$, (article 79). Comme ils sont tous deux extrêmement petits, on peut supposer les arcs qui les mesurent proportionnels aux longueurs FB', BB', et poser :

$$\frac{\frac{1}{2}C}{nC} = \frac{FB'}{BB'};$$

d'où

Correction de réfraction = 2 n × Correction de sphéricité.

Par conséquent,

$$\text{Différence de niveau vrai} = \left\{\begin{matrix}\text{Différence de niveau apparent}\\ \text{donnée par la mire}\end{matrix}\right\} - \frac{1-2n}{2R}K^2.$$

Le logarithme du coefficient de K^2 est, en prenant pour R la valeur du rayon moyen de la terre donnée article 118, et en supposant $n = 0,08$: $\log \frac{1-2n}{2R} = \bar{2},8193350$.

Si l'on veut actuellement avoir par un seul coup de niveau

la hauteur d'un point O (fig. 31) au-dessus d'un autre D, on lira à quelle division de la mire élevée au premier correspond le voyant lorsqu'il se trouve dans l'horizontale du niveau placé au second; on connaîtra ainsi la hauteur OB $= b$. On mesurera de plus l'élévation AD $= a$ du niveau au-dessus du sol de D, puis on calculera la valeur du terme $\frac{1-2n}{2R}K^2$ relative à OD $=$ K; enfin on substituera ces diverses quantités dans l'équation

$$dN = \left\{\begin{matrix}\text{Hauteur du niveau}\\ \text{au-dessus du sol}\\ \text{où il est placé}\end{matrix}\right\} - \left\{\left(\begin{matrix}\text{Hauteur du voyant}\\ \text{au-dessus du sol}\\ \text{où est élevée la mire}\end{matrix}\right) - 0{,}000000066\,K^2\right\};$$

et, selon que cette quantité sera positive ou négative, le point où se trouve la mire sera au-dessus ou au-dessous de celui où l'on a placé le niveau.

Pour une distance de 500 mètres, le dernier terme de cette formule ne s'élèverait qu'à $0^m{,}0165$. Il résulte de là et de ce qui précède, que, si l'on veut rendre les observations relatives à un nivellement composé indépendantes de la sphéricité de la terre et de la réfraction, il faut, lorsque les mires sont éloignées de plus de 1,000 ou 1,200 mètres, placer le niveau vers le milieu de l'espace qui les sépare.

NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE.

102. Pour obtenir la différence de niveau de deux stations au moyen du baromètre, deux observateurs placés à chacune d'elles notent au même instant, autant que possible, les hauteurs (H, h) du mercure dans leurs baromètres, et les températures (T, T'), (t, t') indiquées par deux thermomètres, dont l'un, exposé à l'air libre, donne celle de l'atmos-

phère, et l'autre, logé dans la monture du baromètre, fait connaître celle du mercure. Ces quantités étant substituées dans la formule suivante, que l'on trouve démontrée dans les traités de mécanique et dans la géodésie de M. Puissant, donneront la hauteur x de l'un des points au-dessus de l'autre.

$$x = 18336^{m}\left\{\log\frac{H}{h} - \frac{T'-t'}{12500}\right\}\left\{1+\frac{T+t}{500}\right\}\left\{1+\frac{\cos 2\,l}{352,485}\right\}\left\{1+\frac{x}{\rho'}\right\}.$$

Les lettres H, T, T' représentent la hauteur du baromètre et les températures à la station inférieure; h, t, t' les quantités analogues observées à la station supérieure; l, la latitude approchée du lieu dont on veut avoir la hauteur, ce qui est toujours suffisant, parce que son coefficient est très-petit; enfin ρ' est la longueur de la grande normale de l'ellipsoïde terrestre en ce point.

Comme le second membre contient x, on calcule d'abord la formule en négligeant le terme $\frac{x}{\rho'}$, puis on la calcule de nouveau en y introduisant la valeur qu'on a trouvée.

103. L'expérience a montré que le facteur $\left(1+\frac{x}{\rho'}\right)$ est négligeable dans presque tous les cas qui peuvent se rencontrer; mais alors il faut modifier le coefficient constant 18336; sa valeur nouvelle a été trouvée de 18393 mètres. Ainsi la formule que l'on devra employer le plus généralement est la suivante :

$$(\text{A})\quad x = 18393^{m}\left\{\log\frac{H}{h} - \frac{T'-t'}{12500}\right\}\left\{1+\frac{T+t}{500}\right\}\left\{1+\frac{\cos 2\,l}{352,485}\right\}.$$

La différence T' — t' des températures des baromètres

à la station inférieure et à la station supérieure peut, dans certaines circonstances atmosphériques, se trouver négative.

104. Cette seconde formule, comparée à la première, ne donnerait que 4 mètres d'erreur environ sur une hauteur de 6,000; ainsi elle suffira toujours pour tous les nivellements barométriques qui peuvent intéresser la géographie.

Quelques savants prétendent que, sans faire d'observations correspondantes près du rivage, on peut avoir assez exactement la hauteur d'un lieu au-dessus du niveau de la mer. Il suffit, suivant eux, d'adopter, pour la hauteur du baromètre et la température du thermomètre supposés placés au bord de la mer, les valeurs suivantes :

$$H = 760^{mm},25, \quad T = 66^{\circ},25 + t - 0,09235\,h,$$

(t, h ayant la même signification que ci-dessus).

On conçoit qu'un grand nombre d'expériences pourrait seul faire juger de la justesse de cette assertion.

105. Les hauteurs barométriques observées ont besoin, en général, avant d'être employées, de subir deux corrections qui dépendent, l'une, de la capillarité des tubes des baromètres, l'autre, de la variation qu'éprouve le niveau du mercure dans leurs cuvettes.

Le premier de ces effets se manifeste d'autant plus que les tubes sont plus étroits; il est tel que l'espace compris entre le niveau du mercure dans la cuvette et le sommet du ménisque de la colonne barométrique est toujours moindre que celui qu'on observerait si la capillarité n'existait pas.

Cette double correction est nulle dans les baromètres de

Gay-Lussac. Ils sont formés, comme on sait, de deux tubes de même diamètre, réunis par un troisième qui est capillaire. Celui qui communique avec la partie inférieure de ce dernier est percé, vers sa partie supérieure, d'une très-petite ouverture destinée à donner passage à l'air, en sorte qu'il fait office de cuvette. Il résulte de cette disposition de l'appareil que, si l'on y adapte deux échelles dont les zéros, placés entre les surfaces du mercure, coïncident, on aura la hauteur réelle de la colonne barométrique en faisant la somme des *hauteurs apparentes* du mercure, dans le tube et dans la cuvette.

On peut encore, avec les baromètres de Fortin, s'affranchir des deux corrections que nous avons signalées. Il suffit pour cela de soulever, à l'aide d'une vis de pression, la paroi inférieure de la cuvette, qui est en cuir, jusqu'à ce que la surface du mercure atteigne une pointe d'ivoire fixée à la paroi supérieure et de laquelle part le zéro de l'échelle.

Cette pointe est disposée de telle sorte que la distance ab (fig. 12 *bis*) de son extrémité inférieure au plan horizontal tt, tangent à la surface du mercure dans la cuvette, est égale à la dépression $a'\ b'$ que produit la capillarité dans le tube.

Si elle n'était pas placée convenablement pour compenser cet effet, on aurait recours à la table II, calculée par M. Bouvard, membre du bureau des longitudes.

Supposons, pour en montrer l'usage, qu'une hauteur apparente aa' de la colonne barométrique ait été trouvée de $762^{mm},98$ avec un baromètre qui avait un tube de $11^{mm},00$ de diamètre, et dont la pointe d'ivoire se trouvait à une

distance $ac = 5^{mm},00$ de la paroi intérieure de la cuvette. On trouvera, avec notre table, qu'à un diamètre de 11^{mm} correspond une dépression de $+ 0^{mm},33$, et que le bout d'une pointe disposée comme on vient de le dire se trouve au-dessous du plan horizontal tt, tangent à la surface du mercure, d'une quantité égale à l'effet produit par la dépression de ce liquide dans un tube de 14^{mm}; or, celui qui est dû à un tube de ce calibre équivaut à $0^{mm},16$; par conséquent on a :

Hauteur vraie bb' de la colonne $=\left\{\begin{matrix} aa'+a'b'-ab \\ 762,98+0,33-0,16 \end{matrix}\right\}=763^{mm},15.$

106. Lorsque la paroi inférieure de la cuvette ne sera pas mobile, on emploiera le procédé suivant pour calculer la correction relative à la variation du niveau du mercure : Désignons par d et D les diamètres intérieurs du tube et de la cuvette, et par H' la hauteur de la colonne barométrique lorsque le niveau du mercure de la cuvette est au zéro de l'échelle. Si ce liquide s'élève dans le tube à la *hauteur apparente* H'', c'est qu'il en est sorti de la cuvette une certaine quantité représentée en volume par $\pi\,(H''-H')\left(\frac{d}{2}\right)^2$, ou par $\pi\,x\left(\frac{D}{2}\right)^2$; par conséquent le niveau s'est abaissé dans la cuvette au-dessous du zéro, de la quantité

$$x = (H''-H')\left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

La hauteur vraie de la colonne sera donc, en ayant égard à la capillarité du tube :

$$H = H'' + \text{Dépression relative à } d + (H''-H')\left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Le dernier terme sera positif ou négatif, selon le signe

de H'' — H', et d'autant plus petit que le diamètre de la cuvette sera plus grand relativement à celui du tube.

On donnera, à l'article 167, une application de la formule (A), et on indiquera les précautions à prendre pour arriver à des résultats satisfaisants.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES LATITUDES, LONGITUDES ET AZIMUTS GÉODÉSIQUES D'UNE SUITE DE POINTS LIÉS ENTRE EUX PAR UNE CHAÎNE DE TRIANGLES.

107. Lorsque tous les côtés de la chaîne de triangles (fig. 22) sont calculés, que leurs sommets ont été rapportés à la méridienne et à la perpendiculaire de lieux connus géographiquement, il faut obtenir leurs latitudes et leurs longitudes, afin de pouvoir les projeter sur la carte. A cet effet, on observe astronomiquement celles d'un sommet quelconque A, ainsi que l'azimut d'un côté AL sur son horizon. Avec ces données et celles qui ont été fournies par les opérations géodésiques, on est à même de déterminer les positions géographiques et les azimuts de tous les autres points.

108. Nous allons d'abord les calculer en fonction des côtés des triangles.

Soient (fig. 34) A et B deux points, dont l'un, situé sur le méridien elliptique PAEP', générateur de la surface terrestre, est connu géographiquement, et dont l'autre, situé sur le méridien PBE'P', est déterminé par sa distance AB au premier, qui est donnée avec l'angle PAB qu'elle fait avec le méridien AP.

Si l'on prolonge jusqu'à leurs rencontres avec le petit axe du méridien les verticales AD, BD′ qui passent par chacun de ces points, les angles AHE, BH′E′ qu'elles font avec l'équateur EE′E″ représenteront leurs latitudes respectives; et si l'on mène la droite BD, on formera dans le méridien PBE′ un triangle H′BH″ duquel on tirera la relation:

$$H' = H'' - \beta, \text{ en posant } \beta = DBD'.$$

Il s'agit donc, pour avoir la latitude H′ de B en fonction de celle de A, de trouver pour les angles H″ et β des expressions où entre l'angle AHE = H (latitude connue du point A).

D'abord, si l'on fait attention que la distance AB est extrêmement petite, comparativement aux dimensions du globe, on pourra, sans commettre d'erreur appréciable, supposer égales entre elles les deux lignes AD, BD, et par suite considérer les deux points A et B comme situés sur une surface sphérique qui aurait son centre en D. Or les méridiens PAE, PBE′ détermineront sur elle les arcs de grands cercles CA, CB qui, avec AB, formeront un triangle sphérique dans lequel on connaîtra l'arc AC, complément de la latitude du point A, l'arc AB qui est très-petit à l'égard du précédent et du troisième CB, et l'angle CAB compris entre les deux premiers; on pourra donc calculer le côté CB.

Désignons pour cela par P, P′ les longitudes des deux points qui nous occupent, par Z l'azimut connu de B sur l'horizon de A; par Z′ celui de A sur l'horizon de B; *comptons enfin les longitudes de l'est vers l'ouest et les azimuts du sud vers l'ouest, depuis zéro jusqu'à 360°, nous aurons :*

$CB = 90° - H''$, $CAB = 180° - Z$,

$CA = 90° - H$, $CBA = Z' - 180°$,

$AB = \frac{K}{N}$, $BCA = P' - P$.

(K, représente la longueur en mètres de l'arc AB que nous supposons ne jamais dépasser un degré, et N, celle du rayon AD de la sphère exprimée en mêmes unités.)

Ces valeurs étant mises dans la formule générale (A) de la page 9, qui fait connaître un côté d'un triangle sphérique en fonction des deux autres et de l'angle compris, fournissent l'équation suivante, lorsqu'on remplace $\sin\frac{K}{N}$, $\cos\frac{K}{N}$ par leurs valeurs en séries, et qu'on se borne aux secondes puissances de l'arc :

$$(1)\quad \sin H'' = \sin H - \cos H \cos Z \left(\frac{K}{N}\right) - \tfrac{1}{2}\sin H \left(\frac{K}{N}\right)^2.$$

Ainsi l'angle H″ pourra s'exprimer par un polynôme de la forme :

$$(2)\quad H'' = H + X\left(\frac{K}{N}\right) + X'\left(\frac{K}{N}\right)^2 + \ldots,$$

X, X′ étant des coefficiens indéterminés. Pour en obtenir la valeur, prenons le sinus de part et d'autre; nous aurons :

$$\sin H'' = \sin\left\{H + \left(X\left(\frac{K}{N}\right) + X'\left(\frac{K}{N}\right)^2\right)\right\}.$$

Si l'on développe le second membre en considérant $X\left(\frac{K}{N}\right) + X'\left(\frac{K}{N}\right)^2$ comme un seul arc, et qu'on réduise, on aura :

$$\sin H'' = \sin H + X\cos H\left(\frac{K}{N}\right) + (X'\cos H - \tfrac{1}{2}X^2\sin H)\left(\frac{K}{N}\right)^2;$$

équation qui, comparée terme à terme à (1), donne les valeurs $X = -\cos Z$, $X' = -\frac{1}{2}\sin^2 Z \tang H$.

En les substituant dans (2) on obtient enfin :

$$(3) \quad H'' = H - \left\{ \left(\frac{K}{N}\right)\cos Z + \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 Z \tang H \right\}.$$

Pour calculer actuellement l'angle $DBD' = \beta$, observons que dans le triangle DBD' on a, vu la petitesse de cet angle et le peu de différence qui existe entre BD et $AD = N$:

$$\beta = \frac{DD'}{BD} \sin BD'O = \frac{OD - OD'}{N} \cos H';$$

Mais le triangle rectangle DOH donne $OD = OH \tang H$, et cette valeur devient, en menant les ordonnées AF, AG du point A, et désignant en outre par a, b les demi-axes du méridien :

$$OD = (AG - \text{sous-normale } HF) \tang H = N \cos H \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \tang H,$$

puisque sous-normale $= \frac{b^2}{a^2}x$, et que $x = N \cos H$.

Maintenant si l'on représente par e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, c'est-à-dire si l'on pose $e = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$, on aura pour la valeur réduite de OD :

$$OD = e^2 N \sin H.$$

Il est évident que dans le méridien PBE' on aurait pour la distance OD' l'expression analogue

$$OD' = e^2 N' \sin H'.$$

Ainsi $\beta = e^2 (\sin H - \sin H') \cos H'$, parce qu'à fort peu près $N = N'$.

Transformant maintenant le facteur compris dans la parenthèse au moyen de la deuxième des relations (9) page 8,

et remplaçant dans le résultat H′ par sa valeur $H'' - \beta$ posée plus haut, il vient :

$$\beta = 2\,e^2 \sin\left\{\frac{H-H''}{2} + \frac{\beta}{2}\right\}\cos\left\{\frac{H+H''}{2} - \frac{\beta}{2}\right\}\cos(H''-\beta).$$

Mais β étant extrêmement petit d'une part, et H″ différant peu de H de l'autre, on peut supprimer, sans erreur sensible, la première de ces quantités dans les termes où elle se trouve, prendre ensuite l'angle $\frac{H-H''}{2}$ pour son sinus, et supposer $H'' = H$ dans les deux derniers facteurs ; on obtient alors, par suite de ces hypothèses et en vertu de l'équation (3) :

$$\beta = e^2(H-H'')\cos^2 H = e^2\cos^2 H\left\{\left(\frac{K}{N}\right)\cos Z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 Z \operatorname{tang} H\right\}.$$

Substituant enfin dans l'équation $H' = H'' - \beta$ les valeurs qu'on vient de trouver pour H″ et β, on aura pour la latitude du point B en fonction de celle de A et de l'azimut Z :

$$H' = H - \left\{u''\cos Z + \tfrac{1}{2}u''^2 \sin 1'' \sin^2 Z \operatorname{tang} H\right\}(1 + e^2\cos^2 H);$$

formule dans laquelle $u'' = \frac{K}{N \sin 1''}$ exprime la valeur en secondes de la distance linéaire K.

La longitude P′ se déduira de la relation

$$\frac{\sin BCA}{\sin AB} = \frac{\sin CAB}{\sin CB},$$

en y remplaçant les angles et les arcs par leurs valeurs données plus haut. On en tirera, en prenant les arcs $P'-P$, u'', pour leurs sinus, parce qu'ils sont toujours fort petits, et supposant de plus $H'' = H'$:

$$P' = P + \frac{u'' \sin Z}{\cos H''}.$$

Enfin l'équation

$$\cot \frac{CAB + CBA}{2} = \tang \tfrac{1}{2} BCA \frac{\cos \frac{1}{2}(CB + CA)}{\cos \frac{1}{2}(CB - CA)},$$

qu'on déduit de la troisième des analogies de Néper (page 10), servira à calculer l'azimut Z'. Elle devient par les substitutions, et en faisant toujours $H'' = H'$:

$$\cot \tfrac{1}{2}(Z' - Z) = \tang \{90^\circ - \tfrac{1}{2}(Z' - Z)\} = \tang \tfrac{1}{2}(P' - P) \frac{\sin \frac{1}{2}(H + H')}{\cos \frac{1}{2}(H - H')},$$

ou simplement, à cause de la petitesse des angles,

$$\{90^\circ - \tfrac{1}{2}(Z' - Z)\}, \ \tfrac{1}{2}(P' - P),$$

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}(Z' - Z) = \tfrac{1}{2}(P' - P) \frac{\sin \frac{1}{2}(H + H')}{\cos \frac{1}{2}(H - H')};$$

d'où

$$Z' = 180^\circ + Z - (P' - P) \frac{\sin \frac{1}{2}(H + H')}{\cos \frac{1}{2}(H - H')}.$$

Cette équation fait connaître l'angle dièdre PDBA que forment les deux plans PBD, ABD, tandis que celui qu'il fallait réellement calculer est l'angle PD'BA compris entre les plans PBD', ABD'; mais, comme la différence qui existe entre eux est du troisième ordre et ne peut, par conséquent, être appréciable dans aucun cas, on s'en tient à la formule précédente, dans laquelle on suppose même toujours $\cos \tfrac{1}{2}(H - H') = 1$, à cause de la petitesse de l'angle $\tfrac{1}{2}(H - H')$.

109. Pour faire usage des trois équations qu'on vient de trouver, il faut préalablement connaître la longueur N de



la normale AD terminée au petit axe. Or l'abscisse AG est représentée par

$$x = \mathrm{N} \cos \mathrm{H},$$

et l'ordonnée y a pour expression :

$$y = \text{sous-normale HF} \times \tang \mathrm{H} = \frac{b^2}{a^2} x \tang \mathrm{H},$$

ou bien

$$y = (1 - e^2)\, \mathrm{N} \sin \mathrm{H},$$

en posant comme ci-dessus $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, et remplaçant x par sa valeur.

Ces expressions de x et y étant substituées dans l'équation du méridien, qui est :

$$y^2 + (1-e^2)\, x^2 = a^2 (1-e^2),$$

lorsqu'on met pour b^2 sa valeur en fonction de a^2 et de l'excentricité, donneront :

$$\mathrm{N} = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \mathrm{H})^{\frac{1}{2}}}.$$

110. Ainsi les formules qui résolvent complétement le problème dont nous nous occupons sont les quatre suivantes :

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{l} u'' = \dfrac{(1-e^2 \sin^2 \mathrm{H})^{\frac{1}{2}}}{a \sin 1''} \mathrm{K}, \\ \mathrm{H}' = \mathrm{H} - \left\{ u'' \cos \mathrm{Z} + \dfrac{\sin 1''}{2} (u'' \sin \mathrm{Z})^2 \tang \mathrm{H} \right\} (1 + e^2 \cos^2 \mathrm{H}), \\ \mathrm{P}' = \mathrm{P} + \dfrac{u'' \sin \mathrm{Z}}{\cos \mathrm{H}'}, \\ \mathrm{Z}' = 180^\circ + \mathrm{Z} - \dfrac{u'' \sin \mathrm{Z}}{\cos \mathrm{H}'} \sin \frac{1}{2} (\mathrm{H} + \mathrm{H}'). \end{array} \right.$$

CONVERGENCE DES MÉRIDIENS.

111. Le terme $\frac{u'' \sin Z}{\cos H'} \sin \frac{1}{2}(H + H')$, qui entre dans la dernière des équations précédentes, se nomme la *convergence des méridiens* des lieux A et B, parce qu'il indique, comme on voit, ce dont il s'en manque pour que leurs *méridiennes* soient parallèles; par conséquent, cette quantité *est égale à la différence des longitudes des deux lieux dont il s'agit, multipliée par le sinus de la demi-somme de leurs latitudes* Nous avons vu page 101, l'usage qu'on en fait dans la transformation des coordonnées; plus tard, nous nous en servirons à l'article 127, pour l'orientation d'un plan.

LATITUDE ET LONGITUDE D'UN POINT EN FONCTION DE SES DISTANCES À LA MÉRIDIENNE ET À LA PERPENDICULAIRE D'UN LIEU CONNU GÉOGRAPHIQUEMENT SOIT PAR DES OBSERVATIONS DIRECTES, SOIT PAR LES FORMULES PRÉCÉDENTES.

112. Les formules que nous venons de démontrer ne s'emploient que pour obtenir les positions géographiques des points principaux d'un canevas géodésique, celles des points secondaires se déduisent de leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire d'un lieu connu, article 71.

Supposons (figure 34) que l'on ait les distances $BM = x$, $AM = y$ du point B à la méridienne et à la perpendiculaire du lieu connu A, et qu'on forme le triangle rectangle CBM comme on a formé précédemment le triangle CAB. Pour calculer avec ces données la position géographique du point B en fonction de celle du pied M de la perpendiculaire, dont la longitude est la même que celle de A, et la latitude égale à

$$EM = EA - AM = H - \frac{y}{\rho \sin 1''}$$

$\left(\frac{y}{\rho \sin 1''}\right.$ désignant la valeur en secondes de l'ordonnée y exprimée en parties du rayon de courbure ρ du méridien), il faudra suivre absolument la même marche que ci-dessus; il suffit donc, pour résoudre la question actuelle, d'introduire dans les formules de l'article précédent les valeurs des angles qui conviennent au triangle CBM, c'est-à-dire y faire $Z = 90°$, puis remplacer H et u'' par leurs valeurs actuelles $H - \frac{y}{\rho \sin 1''}$, $\frac{x}{\rho' \sin 1''}$, ρ' étant le rayon de courbure de la perpendiculaire; elles deviendront alors :

$$(\text{B})\begin{cases} H' = H \pm \frac{y}{\rho \sin 1''} - \frac{\sin 1''}{2}\left(\frac{x}{\rho' \sin 1''}\right)^2 \operatorname{tang}\left(H \pm \frac{y}{\rho \sin 1''}\right)\left\{1 + e^2 \cos^2\left(H \pm \frac{y}{\rho \sin 1''}\right)\right\}, \\ P' = P \pm \frac{x}{\rho' \sin 1''} \times \frac{1}{\cos H'}, \\ Z' = 270° \pm \frac{x}{\rho' \sin 1''} \frac{\sin \frac{1}{2}(H + H')}{\cos H'}. \end{cases}$$

On a mis le double signe devant les termes en x et en y, parce que le point B peut se trouver à l'est ou à l'ouest, au nord ou au sud du point A. Dans la pratique, on néglige le dernier facteur de la première équation, et on suppose $H = H'$ dans la dernière; elles deviennent, par suite de ces hypothèses et en comptant les azimuts du nord vers l'est :

$$(\text{c})\begin{cases} H' = H \pm \frac{y}{\rho \sin 1''} - \frac{\sin 1''}{2}\left(\frac{x}{\rho' \sin 1''}\right)^2 \operatorname{tang}\left(H \pm \frac{y}{\rho \sin 1''}\right), \\ P' = P \pm \frac{x}{\rho' \sin 1''} \times \frac{1}{\cos H'}, \\ Z' = 90° \pm \frac{x}{\rho' \sin 1''} \operatorname{tang} H'. \end{cases}$$

CHAPITRE IX.

*EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES DIFFÉRENTES LIGNES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION, EN FONCTION DE LA LATITUDE.

113. * Lorsqu'on veut employer les dernières formules du chapitre précédent, il faut d'abord obtenir la valeur des rayons de courbure ρ et ρ' du méridien et de la perpendiculaire, en fonction de la latitude du point connu A (figure 35), supposé l'origine des coordonnées. Or, dans les courbes du second degré, ce rayon est, comme on sait, représenté généralement par

$$R = \frac{n^3}{\left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

n désignant la longueur de la normale terminée au grand axe et $\frac{p}{2}$ la moitié du paramètre.

Dans le cas actuel on a :

$$\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a} = a\,(1-e^2),$$

et

$$n = \mathrm{AB} = \frac{y}{\sin \mathrm{H}}.$$

Cette dernière valeur devient

$$n = \frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\mathrm{H})^{\frac{1}{2}}},$$

en mettant au lieu de y l'expression qu'on déduit de l'équa-

tion du méridien (article 109), lorsqu'on y remplace x par sa valeur

$$DF = AD \cos H = \frac{a \cos H}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le rayon de courbure du méridien YAX sera donc, par la substitution des ces quantités dans la première équation posée ci-dessus :

$$\varrho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}.$$

114. * Passons actuellement à la recherche de celui de la section perpendiculaire Z'AMZ'.

Si, dans l'équation précédente, on fait H = 90°, on aura pour la valeur du rayon de courbure au sommet du petit axe :

$$\varrho = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or le plan mené par la normale AB, perpendiculairement à celui du méridien YAX, coupe le sphéroïde terrestre suivant une ellipse Z'AMZ'A' dont A est le sommet du petit axe; par conséquent, le rayon de courbure de cette section perpendiculaire sera en ce point, d'après l'observation précédente, en désignant par a', b' les demi-axes et par e' le rapport de l'excentricité au demi-grand axe :

$$\varrho' = \frac{a'}{(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour déterminer a' et b' cherchons l'équation de la section Z'AMZ'A' relativement aux axes BY', BZ'.

Le sphéroïde a pour équation, quand on prend pour axe de rotation celui des Y :

$$(1) \qquad y^2 + (1-e^2)(x^2+z^2) = a^2(1-e^2).$$

Or les coordonnées d'un point quelconque M de la section dont il s'agit, sont, dans son plan :

$$BC = y', \qquad BD = z',$$

et celles de ce même point considéré sur le sphéroïde ont pour valeurs, en fonction des précédentes :

$$MN = CE = y = y' \sin H,$$
$$OE = x = OB + BE = p + y' \cos H,$$
$$BD = z'.$$

Par conséquent, si on les substitue dans l'équation (1), on aura pour celle de la section perpendiculaire Z'AMZ'A' rapportée aux axes BY', BZ' :

$$(1-e^2\cos^2 H)\,y'^2 + 2\,p\cos H\,(1-e^2)\,y' + (1-e^2)\,z'^2 = (1-e^2)(a^2-p^2).$$

Faisant disparaître le second terme par la méthode connue en algèbre, c'est-à-dire en posant :

$$y' = y'' - \frac{p\cos H\,(1-e^2)}{1-e^2\cos^2 H},$$

ce qui revient à placer l'origine des axes en un point b de celui des Y', on aura, après les réductions :

$$(1-e^2\cos^2 H)\,y''^2 + (1-e^2)\,z'^2 = \frac{(1-e^2)\left\{(1-e^2\cos^2 H)(a^2-p^2) + p^2\cos^2 H\,(1-e^2)\right\}}{1-e^2\cos^2 H};$$

d'où, en posant successivement $y'' = 0$, et $z' = 0$:

$$z'^2 = a'^2 = \frac{(1-e^2\cos^2 H)(a^2-p^2) + p^2\cos^2 H\,(1-e^2)}{1-e^2\cos^2 H},$$

$$y''^2 = b'^2 = \frac{(1-e^2)\left\{(1-e^2\cos^2 H)(a^2-p^2) + p^2\cos^2 H\,(1-e^2)\right\}}{(1-e^2\cos^2 H)^2},$$

et par suite

$$e'^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{e^2 \sin^2 H}{1 - e^2 \cos^2 H}.$$

La valeur de a'^2 dépendant de p^2, cherchons d'abord cette quantité. On a :

$$p = \mathrm{OE} - \mathrm{BE} = x - y \cot H = \frac{ae^2 \cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$a^2 - p^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)(1 + e^2 \cos^2 H)}{1 - e^2 \sin^2 H}.$$

Introduisant cette expression dans celle de a'^2, on en tire après les réductions :

$$a'^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 H)(1 - e^2 \cos^2 H)};$$

par conséquent,

$$\varrho'^2 = \frac{\dfrac{a^2 (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 H)(1 - e^2 \cos^2 H)}}{1 - \dfrac{e^2 \sin^2 H}{1 - e^2 \cos H^2}};$$

donc enfin

$$\varrho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

On peut remarquer que cette valeur est la même que celle de la normale $\mathrm{AD} = \mathrm{N}$ (figure 34), terminée au petit axe.

LIGNES PRINCIPALES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION, ET FORMULES DIVERSES.

115. Rayon de courbure

- du méridien........ $\varrho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$,
- d'une section perpendiculaire au méridien, ou longueur de la normale terminée au petit axe .... $\varrho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$,
- d'une section qui fait un angle z avec le méridien............. $R = \frac{\rho\rho'}{\rho^2\sin^2 z + \rho'^2\cos^2 z}$,

Rayon d'un parallèle........... $r = \frac{a\cos H}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$,

Rayon OA de la terre (figure 34).. $R' = a\left\{1 - \frac{e^2(1-e^2)\sin^2 H}{1-e^2\sin^2 H}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

$$\log\varrho = \log(1-e^2) + \log a + 3M\frac{e^2\sin^2 H}{2}\left(1+\frac{e^2\sin^2 H}{2}\right),$$

$$\log\varrho' = \ldots\ldots\ldots + \log a + M\frac{e^2\sin^2 H}{2}\left(1+\frac{e^2\sin^2 H}{2}\right),$$

$$\log(1+e^2\cos^2 H) = \ldots\ldots\ldots\ldots + Me^2\cos^2 H\left(1-\frac{e^2\cos^2 H}{2}\right).$$

116. Ces trois dernières formules, dans lesquelles le module M = 0,4342945, s'obtiennent aisément à l'aide des séries logarithmiques (D') données à l'article 7. Pour les appliquer, il faut connaître les valeurs de e^2 et de a. Or, si l'on désigne par α, *l'aplatissement de la terre*, c'est-à-dire le rapport entre la différence des axes a, b et le grand axe, on aura :

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a},$$

d'où

$$\frac{b^2}{a^2} = (1 - \alpha)^2.$$

Mais d'une autre part

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,$$

donc

$$(1 - \alpha)^2 = 1 - e^2,$$

et par suite

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

117. En comparant entre eux les longueurs des arcs du méridien mesurés en France et au Pérou, Delambre a trouvé que l'on devait adopter pour valeur de α la fraction $\frac{1}{309{,}65} = 0{,}00322945$ dont le logarithme est :

$$\log \alpha = 7{,}5091290.$$

Dans cette hypothèse le quart du méridien a pour longueur en toises :

$$Q = 5131111^t{,}4, \qquad \log Q = 6{,}71021141,$$

ou en mètres, en prenant pour unité de longueur le mètre légal qui vaut $443^{\text{lignes}},296$:

$$Q = 10000722^{\text{m}}, \qquad \log Q = 7{,}00003134.$$

Si l'on substitue actuellement pour α et Q les valeurs précédentes dans les formules suivantes :

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2,$$

$$\log a = \log \frac{2Q}{\pi} + \frac{M\alpha}{2} + \frac{M\alpha}{2} \times \frac{\alpha}{8} - \frac{M\alpha^2}{16} \times \frac{\alpha}{3} \ldots,$$

$$\log b = \log \frac{2Q}{\pi} - \frac{M\alpha}{2} - \frac{M\alpha^2}{16} \times 7 - \frac{M\alpha^3}{48} \times 17 \ldots,$$

que donne M. Puissant dans son Traité de géodésie, on aura :

$$e^2 = 0{,}006448476, \qquad \log e^2 = 7{,}8094573,$$
$$1 - e^2 = 0{,}993551524, \quad \log(1-e^2) = 9{,}9971903,$$
$$a = 6376951^{m}, \qquad \log a = 6{,}80461302,$$
$$b = 6356354^{m}, \qquad \log b = 6{,}80320821.$$

Le logarithme du quart du méridien a pour expression en fonction du rayon a de l'équateur :

$$\log Q = \log \frac{\pi a(1-e^2)}{2} + M\left\{3\frac{e^2}{4} + \frac{27}{4}\left(\frac{e^2}{4}\right)^2\right\}.$$

118. — Lorsqu'on considère le sphéroïde terrestre tout entier, l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{305} = 0{,}003278689$, qu'on déduit des inégalités lunaires, doit être préferé, parce qu'il est exempt de toute influence locale.

Les quantités e^2, a, b ont alors les valeurs suivantes (*Géodésie* de Francœur) :

$$e^2 = 0{,}006546627, \qquad \log e^2 = 7{,}816017614,$$
$$1 - e^2 = 0{,}993453373, \quad \log(1-e^2) = 9{,}997147489,$$
$$a = 6377116^{m}, \qquad \log a = 6{,}804624289,$$
$$b = 6356207^{m}, \qquad \log b = 6{,}803198034.$$

Dans la même hypothèse, le rayon moyen OA (figure 34), à la latitude de 45°, a pour longueur :

$$R = 6366698^{m},$$

et pour logarithme

$$\log R = 6{,}8039143.$$

L'arc d'un degré du méridien terminé à la latitude H est exprimé en mètres par l'équation suivante :

$$\text{Degré de latitude} = 111119^{m},256 - 547^{m},3241 \cos(2H+1^{\circ}) + 1^{m},1105 \cos 2(2H+1^{\circ}).$$

Celui d'un degré de parallèle serait, sous la même latitude H :

$$\text{Degré de longitude} = \frac{\pi}{180} \times \frac{a \cos H}{(1-e^{2}\sin^{2}H)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on faisait une nouvelle hypothèse sur l'aplatissement, la position géographique d'un même point calculée avec la nouvelle valeur de α différerait un peu de celle qu'on aurait eue d'abord, à cause de la quantité $u'' = \frac{K}{\rho' \sin 1''}$ qui entre dans les formules qu'on emploie; la longitude surtout serait influencée, parce que ce terme est l'un des facteurs principaux de la formule qui la donne.

CHAPITRE X.

DÉTERMINATION DE LA DISTANCE DE DEUX POINTS AU MOYEN D'OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES. — VÉRIFICATION DES OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

119. Si l'on devait lever la carte d'une côte très-accidentée, ou d'un archipel composé d'un grand nombre de petites îles, il serait possible qu'on ne pût pas trouver un terrain convenable pour y mesurer une base; on choisirait alors deux sommets visibles l'un de l'autre et situés, par rapport aux points principaux de la côte ou de l'archipel, à une distance convenable pour former des triangles. On déterminerait par des observations astronomiques les positions géographiques des signaux qu'on y aurait érigés ainsi que l'azimut de l'un sur l'horizon de l'autre, puis on calculerait leur plus courte distance en mètres par la méthode suivante :

Soient A et B (figure 34), deux lieux du sphéroïde terrestre connus par leurs latitudes H, H', et leurs longitudes P, P', et situés en outre à une distance l'un de l'autre qui ne dépasse pas un degré. Abaissons de B sur le méridien de A l'arc perpendiculaire B M, et désignons par u'', x'', y'' les arcs A B, B M, A M considérés sur la sphère dont le centre serait en D'', milieu de la distance D D' interceptée sur la ligne des pôles par les normales qui correspondent sur le sphéroïde aux points A et B; de plus appelons Z et z les

angles en ces points. Cela posé dans le triangle sphérique A M B rectangle en M, on a, vu la petitesse de ses côtés relativement au rayon terrestre, et le peu de différence qui existe entre Z et z :

$$x'' = u'' \sin Z, \qquad y'' = u'' \cos Z.$$

On tire de là, pour évaluer l'azimut de B sur l'horizon de A compté du sud vers l'ouest :

$$\tang Z = \frac{x''}{y''}.$$

Tout se réduit donc à connaître x'' et y''.

Or les méridiens de A et de B interceptent, avec le plan A D'' B, sur la sphère que nous avons décrite, le triangle B C A dans lequel on a :

$$CA = 90^\circ - AD''e = 90^\circ - h,$$
$$CB = 90^\circ - BD''e' = 90^\circ - h', \qquad CAB = 180^\circ - Z,$$
$$AB = u'', \qquad BCA = P' - P.$$

En substituant ces quantités dans les relations générales

$$\frac{\sin BCA}{\sin AB} = \frac{\sin CAB}{\sin CB},$$

(A) $\cos CB = \cos CA \cos AB + \sin CA \sin AB \cos A,$

on en déduira les équations suivantes par le procédé employé article 108 :

$$P' - P = \frac{u'' \sin Z}{\cos h'},$$
$$h' = h - u'' \cos Z - \frac{\sin 1''}{2}(u'' \sin Z)^2 \tang h;$$

et de celles-ci on tirera :

$$(\text{B}) \quad \begin{cases} x'' = u'' \sin Z = (P' - P) \cos h', \\ y'' = u'' \cos Z = h - h' - \frac{\sin 1''}{2} x''^2 \operatorname{tang} h. \end{cases}$$

Lorsque les angles h, h' seront connus, on calculera l'azimut Z à l'aide de ces valeurs de x'', y'', puis ensuite on se procurera u'' par l'une des équations

$$u'' = \frac{x''}{\sin Z}, \qquad u'' = \frac{y''}{\cos Z}.$$

Si l'on représente actuellement par K le nombre de mètres contenus dans cet arc, par x et y les coordonnées linéaires de B par rapport à A exprimées en unités de la même espèce, on aura, pour les déterminer, les relations :

$$K = u'' \varrho' \sin 1'', \quad x = x'' \varrho' \sin 1'', \quad y = y'' \varrho' \sin 1'',$$

dans lesquelles le rayon ϱ' de notre sphère est à fort peu près égal, comme on peut le voir, à la longueur de la grande normale qui passe par la latitude moyenne des deux points; ainsi la valeur qu'on devra employer est celle que donne la formule suivante :

$$\varrho' = \frac{a}{\left\{1 - e^2 \sin^2\left(\frac{H+H'}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Cherchons maintenant à exprimer h, h' en fonction des arcs donnés H, H'. Avec un peu d'attention on voit que les triangles hAH, H'Bh', situés l'un dans le plan du méridien PAE, l'autre dans celui du méridien PBE', donnent :

$$h = H - D''AD, \qquad h' = H' + D'BD'';$$

de plus, comme la distance des deux points est supposée ne pas dépasser un degré, on a à fort peu près l'angle

$$D''AD = D'BD'' = \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3} e^2 (\sin H - \sin H') \cos H'$$

(page 143);

ou bien, en transformant au moyen de la seconde des formules de la page 8, et ayant égard au peu de différence qui existe entre H et H' :

$$\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3} e^2 (H - H') \cos^2 \frac{1}{2} (H + H').$$

Par conséquent, les valeurs de h, h' qu'il faudra substituer dans les équations ci-dessus sont :

$$h = H - \frac{1}{3} e^2 (H - H') \cos^2 \frac{1}{2} (H + H'),$$
$$h' = H' + \frac{1}{3} e^2 (H - H') \cos^2 \frac{1}{2} (H + H').$$

120. L'erreur qui existera sur la longueur d'une base ainsi déterminée ne dépendra que de celles des observations astronomiques; car l'expérience démontre qu'une distance de 80,000 mètres environ est la même à $2^m,34$ près, lorsqu'on la déduit d'une triangulation ou quand on la calcule par la méthode précédente, au moyen des latitudes et longitudes de ses extrémités fournies par la géodésie.

121. On aura soin de choisir les deux termes de la base aussi loin l'un de l'autre que les localités et le but qu'on se propose le permettront; en un mot, on fera en sorte qu'aucun côté des triangles à former ne soit plus grand qu'elle, si l'on veut ne pas s'exposer à introduire dans leur détermination des erreurs plus fortes que celle qui provient des observations au moyen desquelles elle a été obtenue.

Il ne faudra pas employer dans les calculs des triangles

l'angle Z à l'aide duquel on l'a déterminée. Pour orienter le réseau trigonométrique, on partira de la valeur de cet angle fournie par les observations astronomiques, et on s'en servira pour calculer les distances de l'autre extrémité de la base à la méridienne et à la perpendiculaire du point où il a été observé. Les coordonnées rectangulaires, et les positions géographiques des points remarquables de la côte ou des îles dont se compose l'archipel qu'on veut reconnaître, s'obtiendront ensuite par les procédés ordinaires (articles 71 et 112).

122. Si la longitude de l'un des points, de B, par exemple, n'était pas connue, que l'on se fût contenté d'observer seulement H, P, H' et l'azimut Z compté du sud vers l'ouest, on obtiendrait la base $u'' = AB$ par la relation

$$\sin h' = \sin h \cos u - \cos h \sin u \cos Z,$$

que donne l'équation (A) (page 158).

On emploiera pour dégager u un angle auxiliaire φ déterminé par le rapport

(1) $$\tang \varphi = \frac{\tang h}{\cos Z},$$

et on aura :

(2) $$\sin(\varphi - u) = \frac{\sin h'}{\sin h} \sin \varphi.$$

La valeur de u une fois trouvée, on la convertira en secondes, puis on calculera comme ci-dessus la distance linéaire K que l'on cherche, par l'équation

$$K = u'' \varrho' \sin 1''.$$

123. Si l'on n'avait observé que les angles H, Z et $P'-P=p$, il faudrait commencer par se procurer H' en fonction de H. Pour cela menons la droite BD, et considérons pour un instant le triangle CAB comme appartenant à la sphère décrite avec la normale $AD=BD$ à fort peu près; on aura (pages 142 et 144), en observant qu'on peut prendre $\cos^2 H = \cos^2 \frac{1}{2}(H+H'')$ à cause du peu de différence qui existe entre H et H'':

$$H' = H'' - \beta, \qquad \beta = e^2 (H-H'') \cos^2 \tfrac{1}{2} (H+H''),$$
$$CB = 90^\circ - H'', \qquad CAB = 180^\circ - Z,$$
$$CA = 90^\circ - H,$$
$$AB = u, \qquad BCA = (P'-P) = p;$$

et par suite, en substituant ces quantités dans la première des relations (C) page 9 :

$$\tang H'' = \tang H \cos p - \frac{\sin p}{\cos H} \times \frac{1}{\tang Z}.$$

Pour approprier cette équation au calcul logarithmique, on posera :

$$\tang \varphi = \sin H \tang Z,$$

et on aura, après les réductions,

$$\tang H'' = \frac{\tang H \sin(\varphi - p)}{\sin \varphi}.$$

Cet angle une fois obtenu on s'en servira pour calculer β et H'; en introduisant les valeurs trouvées pour ces quantités dans les équations

$$h = H - \frac{\beta}{2}, \qquad h' = H' + \frac{\beta}{2},$$

on aura toutes les données dont on a besoin dans le cas

actuel; car avec ces valeurs on se procurera u par l'une des équations (B), page 159, desquelles on tire :

$$u = \frac{p \cos h'}{\sin Z}, \qquad u = \frac{h - h' - \frac{\sin 1''}{2} (p \cos h')^2 \operatorname{tang} h}{\cos Z}.$$

Les personnes qui désireront approfondir les diverses questions que nous venons de traiter ne pourront mieux faire que de consulter le mémoire de M. Chazallon sur la mesure des bases (*Annales maritimes*, 1837, 1[er] vol.); les formules qu'il donne sont un peu plus rigoureuses que les nôtres, dont le degré d'exactitude suffit (art. 120, 176.)

VÉRIFICATION DES OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

124. Pour s'assurer de la bonté des opérations géodésiques qu'on a exécutées sur toute l'étendue d'une côte, et de l'exactitude des calculs par lesquels on a déterminé la longueur des côtés des triangles de la chaîne, leurs positions géographiques, et leurs azimuts, il est nécessaire de mesurer une nouvelle base à l'autre extrémité du réseau. Il faut en outre observer, en un point connu par le travail géodésique, la latitude, la longitude, ainsi que l'azimut d'un côté sur l'horizon de ce point. La comparaison des résultats qu'on obtient en calculant un même côté successivement avec cette dernière base et avec celle qui a servi à calculer toute la chaîne, fera apprécier l'exactitude des opérations. Sur une distance de 12,000 mètres l'erreur ne doit pas dépasser 2 mètres dans une triangulation de premier ordre faite avec soin. On est loin de trouver le même accord entre les résultats fournis par les observations astronomiques et ceux qu'on a déduits des calculs géodésiques. Les différences dans les

meilleures triangulations peuvent s'élever à 7" sur la latitude, à 24" sur la longitude, et à 34" sur l'azimut. Elles tiennent aux erreurs d'observations et surtout à l'hypothèse sur l'aplatissement de la terre; car tous les travaux géodésiques et astronomiques exécutés jusqu'à ce jour, pour connaître la forme de la surface terrestre, concourent pour prouver qu'elle n'est pas rigoureusement un ellipsoïde de révolution, comme on le suppose habituellement.

CHAPITRE XI.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA CONSTRUCTION DES PLANS ET DES CARTES HYDROGRAPHIQUES. — RECHERCHE DE L'ÉQUATION DE LA LOXODROMIE.

DES PLANS DE CONSTRUCTION.

125. Quand tous les points principaux et secondaires sur lesquels on a appuyé les opérations topographiques et hydrographiques sont déterminés par leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire, on dresse les projections des plans de construction sur lesquels on doit rapporter tous les détails fournis par les observations faites, soit à terre, soit à la mer. A cet effet, on trace sur une feuille de papier (figure 22) une série de lignes parallèles et équidistantes, que l'on coupe perpendiculairement par une autre série de droites tracées de la même manière. On prend l'intersection de deux d'entre elles pour le point où l'on a placé l'origine des axes; les autres lignes deviennent alors des parallèles à sa méridienne et à sa perpendiculaire. Après être convenu de la distance réelle que représente, sur le terrain, le côté des carrés formés par les intersections mutuelles de ces droites, on place graphiquement dans chacun d'eux, à l'aide d'un compas de proportion, les points qui doivent s'y trouver. On a, par ce moyen, tous

les triangles de la chaîne rabattus sur l'horizon d'un même lieu avec les divers objets qui s'y rattachent. Sur ce canevas, ainsi disposé, on construit la topographie de la côte, et le travail de mer par les méthodes indiquées sommairement au chapitre II.

Il est bon d'adopter, pour ces plans, une échelle qui permette d'indiquer distinctement tous les détails que les navigateurs ont besoin de connaître. En représentant par 14 centimètres le côté de chaque carré que nous supposons égal à 2,000 mètres, ce qui donne une construction à l'échelle de $\frac{1}{14000}$ à fort peu près, on remplira parfaitement le but qu'on se propose. Néanmoins il sera quelquefois utile de la doubler afin de pouvoir représenter les moindres accidents de la côte; mais, je le répète, dans ce cas-là, l'emploi de la planchette est infiniment préférable à toute autre méthode pour se procurer les détails qu'on désire obtenir.

126. Lorsqu'on veut construire immédiatement à l'échelle de la carte des lignes de sondes faites au large ou à la côte, ce qui suffit pour les localités qui n'offrent rien d'intéressant, il faut dresser une projection à cette échelle. Il est nécessaire pour cela de connaître par quelle longueur on doit représenter le côté de 2,000 mètres de chaque carré à la latitude sous laquelle on a travaillé. Or, dans les cartes marines, la minute de longitude est, sous toutes les latitudes, égale à celle de l'équateur, et celle-ci vaut 1855^m55 d'après la valeur que nous avons adoptée pour le rayon de l'équateur (article 118); par conséquent, si *m* millimètres désignent la grandeur de cette quantité sur

la carte, 2,000 mètres y seront représentés à une latitude donnée H par l'expression suivante :

$$\frac{2000 \times m}{1855} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{Le nombre de minutes de l'équateur que} \\ \text{contient une minute du méridien à la latitude H (art. 134).} \end{array} \right\}$$

Ce dernier facteur sera donné par la table VI des latitudes croissantes.

Les plans de construction du Pilote français ont été dressés au $\frac{1}{14400}$, ou à l'échelle de 6 lignes pour 100 toises.

ORIENTATION D'UN PLAN.

127. Le point d'où l'on compte les abscisses et les ordonnées est rarement situé sur le plan particulier du port ou de la rade qu'on a construit, en sorte que les parallèles à la méridienne, qui y sont tracées, n'indiquent pas la direction *nord* et *sud* de son lieu principal. Pour l'obtenir, on calcule la convergence α des méridiens en ce point (figure 22); la ligne AY' menée alors dans le sens convenable, c'est-à-dire vers l'est ou vers l'ouest, selon que le point que l'on considère se trouve à l'ouest ou à l'est de l'origine des axes, représente le *méridien vrai* du lieu sur lequel on doit construire le cadre du plan. Afin de tracer plus exactement cette ligne AY', on calcule par le triangle rectangle Y'YA le petit côté YY' $=$ AY tang (*de l'angle de convergence* $=\alpha$), puis on détermine par cette valeur le point Y' que l'on joint ensuite avec A.

TRACÉ DES MÉRIDIENS ET DES PARALLÈLES SUR UN PLAN.

128. Quoique l'on ne soit pas dans l'habitude de tracer sur les plans les projections des méridiens et des parallèles,

voici néanmoins les équations à l'aide desquelles on pourra construire ces courbes :

Soient (figure 36), sur la sphère PEP'E', PAP' le méridien principal d'un plan ; H et P les latitude et longitude d'un point A situé sur ce cercle, et considéré comme origine des coordonnées ; A' un point quelconque dont H' et P' représentent la latitude et la longitude ; enfin x et y ses coordonnées A'B et AB par rapport à A.

Cela posé, si l'on trace le méridien PA'P', on formera un triangle sphérique PBA' rectangle en B dans lequel on aura (page 12) :

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{tang} x = \cos(H+y) \operatorname{tang}(P-P').$$

Cette relation entre x et y subsistant pour tous les points du méridien PA'P', qui fait avec le méridien principal un angle égal à P—P', en est l'équation sur la sphère.

Celle du parallèle qui passe par le point A', dont la latitude est H', sera représentée par la relation

$$\text{(B)} \qquad \sin H' = \sin(H+y) \cos x.$$

Or, dans le système de projection adopté pour rapporter sur un plan les diverses positions obtenues au moyen de leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire d'un lieu pris pour départ, on développe le méridien PAP' (figure 37), suivant une droite pap' ; puis, après avoir pris sur lui une longueur ab = AB, on élève en b une perpendiculaire sur laquelle on porte une distance ba' = BA'. Il résulte donc de ce procédé que sur la projection les relations ci-dessus subsistent toujours ; ainsi, elles représentent

les équations des projections d'un méridien et d'un parallèle qui passent par un point connu.

129. Il sera plus commode, pour tracer ces courbes, de calculer leurs divers points d'intersection au moyen des équations

$$\cos(H+y) = \cot H' \cos(P-P'), \qquad \sin x = \cos H' \sin(P-P'),$$

dans lesquelles on fera croître simultanément H et P de cinq en cinq ou de dix en dix minutes, par exemple, selon l'étendue du plan. On convertira en secondes les arcs qu'on aura obtenus pour x et y, puis on multipliera ces derniers résultats par $\rho' \sin 1''$ afin d'avoir leurs valeurs exprimées en mesures linéaires. (ρ' désigne ici le rayon de courbure du sphéroïde à la latitude moyenne du lieu.)

130. Lorsque le plan se trouve renfermé entre deux méridiens et deux parallèles fort rapprochés, les équations de ces courbes peuvent se présenter sous la forme suivante, vu la petitesse des quantités x et y par rapport au rayon de courbure ρ' du sphéroïde et le peu de différence qu'on suppose exister entre H et H'.

$$(y+\rho' \operatorname{tang} H)^2 + \frac{2\rho'}{\cos H \operatorname{tang}(P-P')}\, x = \rho'^2 (2+\operatorname{tang}^2 H),$$

$$(y-\rho' \cot H)^2 + x^2 = \rho'^2 \cot H \left(\cot H + 4 \sin \tfrac{1}{2}(H-H')\right).$$

On voit alors que les méridiens deviennent des arcs de parabole et les parallèles des arcs de cercle.

CONSTRUCTION DES CARTES RÉDUITES.

131. Lorsqu'on veut passer de tous les plans particuliers de construction à la carte dont ils forment les diverses parties, il faut d'abord tracer la projection de celle-ci, c'est-à-dire, le système de lignes qui doivent représenter les méridiens et les parallèles.

Quoique la marche à suivre soit bien connue, je crois cependant utile d'entrer ici dans quelques détails, tant sur le but des cartes marines que sur les formules à l'aide desquelles on calcule les longueurs des degrés de latitude en fonction de ceux de longitude mesurés sur l'équateur.

132. L'usage qu'on fait des cartes dans la navigation consiste principalement à tracer le rumb de vent suivant lequel il faut se diriger pour aller d'un point à un autre, et à connaître la longueur du chemin parcouru : il importe donc d'avoir une projection qui donne immédiatement ces deux choses.

On a d'abord imaginé les *cartes plates* où la sphère est développée en un rectangle qui a pour base la longueur de l'équateur, et pour hauteur la moitié du méridien. Par ce mode de construction, les degrés des méridiens conservent leur grandeur réelle, mais ceux des parallèles sont tous égaux aux degrés de l'équateur. De là résultent deux graves inconvénients : 1° le rapport entre les degrés des parallèles et ceux du méridien pris sur la carte n'étant pas le même que sur le globe, la ligne qui joint deux points sur la carte n'indique, par l'angle sous lequel elle coupe les méridiens, le rumb de vent qu'il faut suivre pour aller de l'un de ces

points à l'autre, qu'autant qu'ils sont tous deux placés sur le même méridien ou sur le même parallèle; 2° dans les routes obliques, ou dans celles d'est et ouest, le chemin paraît plus long d'après la carte qu'il n'est réellement; elle n'indique sa véritable longueur que lorsqu'on a navigué sur un même méridien ou sur l'équateur.

Projection de Mercator.

133. Les cartes réduites, dont l'invention est due à *Mercator*, ont l'avantage de parer aux deux inconvénients que nous venons de signaler. Dans leur construction on donne la même longueur à tous les degrés des parallèles, (celle du degré de l'équateur); mais, comme elle diminue en réalité à mesure qu'on avance vers le pôle, on augmente les degrés correspondants de latitude de manière à ce que le rapport entre la grandeur d'un degré de parallèle et celle du degré de méridien correspondant, pris tous deux sur la carte, soit le même que celui qui existe entre ces deux longueurs prises sur le globe.

Nous allons nous occuper de calculer ce rapport en ayant égard à l'aplatissement de la terre. Soient de, et dp les éléments de l'équateur et d'un parallèle compris entre les deux mêmes plans méridiens (figure 38), dh' l'élément d'un de ces méridiens correspondant à dp; a, r les rayons de l'équateur et du parallèle, on aura :

$$dp = \frac{r}{a}\,de;$$

et le rapport entre dh' et dp sera exprimé par

$$\frac{dh'}{dp} = \frac{dh'}{de} \times \frac{a}{r}.$$

Si nous désignons actuellement par dh la longueur que doit avoir sur la carte l'élément dh' lorsqu'on y représente dp par de, nous aurons, pour le rapport entre les éléments du méridien et du parallèle de la carte, l'expression $\frac{dh}{de}$; comme il doit être le même que celui qui existe réellement, on posera :

$$\frac{dh}{de} = \frac{dh'}{dp} = \frac{dh'}{de} \times \frac{a}{r};$$

d'où

$$(1) \qquad dh = dh' \times \frac{a}{r}.$$

Le petit arc dh' s'obtiendra facilement si l'on observe qu'en un point A du méridien (figure 34), dont H est la latitude, on a :

$$dh' = -dx \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

le signe moins indiquant ici que l'on suppose l'origine de l'arc h' à l'équateur; car, dans ce cas, il croît lorsque x diminue.

Cela posé, de l'équation du méridien (article 109) on tire :

$$\frac{dy}{dx} = -(1-e^2)\frac{x}{y};$$

et celle-ci devient, en remplaçant x et y par leurs valeurs trouvées (page 146) :

$$\frac{dy}{dx} = -\cot H.$$

Par suite

$$dh' = -dx\,(1 + \cot^2 H)^{\frac{1}{2}} = -\frac{dx}{\sin H};$$

ou bien, en substituant pour dx sa valeur déduite de la différentiation de x par rapport à H :

$$dh' = \frac{a(1-e^2)\,dH}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}.$$

Introduisant dans l'équation différentielle (1) cette valeur de dh', et celle du rayon r du parallèle donnée à l'article 115, elle prendra la forme :

$$dh = \frac{a(1-e^2)\,dH}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{a}{\frac{a\cos H}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{a(1-e^2)\,dH}{\cos H\,(1-e^2\sin^2 H)}.$$

Pour l'intégrer multiplions e^2 par $\sin^2 H + \cos^2 H = 1$, nous aurons :

$$dh = a\frac{\cos H\,dH}{1-\sin^2 H} - ae\frac{e\cos H\,dH}{1-e^2\sin^2 H};$$

d'où, en prenant les intégrales entre l'équateur et la latitude H :

$$h = a\int_0^H \frac{d\sin H}{1-\sin^2 H} - ae\int_0^H \frac{d\,(e\sin H)}{1-e^2\sin^2 H}.$$

Les calculs de l'intégration étant effectués, on trouve :

$$h = a\left\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+\sin H}{1-\sin H}\right) - \tfrac{1}{2}\,e\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+e\sin H}{1-e\sin H}\right)\right\}.$$

Or, en vertu de la première des relations (8), page 7, et de la troisième des relations (B'), page 14, on a :

$$\frac{1+\sin H}{1-\sin H} = \mathrm{tang}^2\left(45^\circ + \frac{H}{2}\right),$$

et

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1+e\sin H}{1-e\sin H}\right) = 2\left(e\sin H + \frac{(e\sin H)^3}{3} + \ldots\ldots\right);$$

donc

$$h = a \left\{ \text{Log tang} \left(45^\circ + \frac{H}{2} \right) - e^2 \sin H - \frac{e^4 \sin^3 H}{3} \ldots\ldots \right\}.$$

En exprimant en minutes le rayon a de l'équateur et convertissant le logarithme hyperbolique en logarithme vulgaire, on aura enfin :

$$h = \frac{10800'}{\pi} \times \frac{1}{M} \log \text{tang} \left(45^\circ + \frac{H}{2} \right) - \frac{10800'}{\pi} \left(e^2 \sin H + \frac{e^4 \sin^3 H}{3} \right).$$

Dans cette formule, dont le premier terme convient à la sphère, le module $M = \frac{1}{\text{log népérien de } 10} = 0{,}4342945.$

134. Les tables de latitudes croissantes de Mendoza ont été calculées sur cette formule dans l'hypothèse d'un aplatissement $\alpha = \frac{1}{321} = 0{,}003115$. La différence qu'elles donnent avec celles qu'on obtiendrait pour $\alpha = \frac{1}{305}$ est sans importance, car, sur la longueur d'un arc de méridien compris entre l'équateur et le parallèle de 82°, elle ne s'élèverait qu'à 1', 12.

Si l'on représente par une longueur quelconque la minute de l'équateur, on aura de suite avec ces tables le facteur par lequel il faut multiplier cette valeur pour obtenir la grandeur de la minute de latitude croissante correspondante à une latitude connue; car la longueur qu'on veut donner sur la carte à la minute de l'équateur étant désignée par m millimètres, par exemple, l'expression de celle d'une minute de latitude croissante à la latitude H sera, en appelant n, n' le nombre de minutes de l'équateur contenues dans des arcs de $H^\circ + 10'$, $H^\circ - 10'$:

Longueur d'une minute de latitude sur la carte $= \frac{n'-n}{20} \times m$.

Dans les cartes particulières du Pilote français la minute de l'équateur, c'est-à-dire *m*, est représentée par $0^m,0271$, et dans les cartes générales par $0^m,0103$; ou, en mesures anciennes, par un pouce et $0^p,381$.

135. On pourra donc actuellement tracer avec facilité les méridiens et les parallèles de la carte, de degré en degré, ou de minute en minute; chaque point se placera ensuite graphiquement sur cette projection par sa latitude et sa longitude au moyen du compas de proportion.

Avant d'y rapporter les détails topographiques et les sondes, qui se trouvent sur les divers plans de construction, on commencera par marquer les points d'intersection des droites qu'on a menées sur chacun d'eux parallèlement à la méridienne et à la perpendiculaire; puis, dans les quadrilatères ainsi formés, on réduira par les méthodes graphiques connues les détails que renferment les carrés correspondants du plan.

On se contente ordinairement de ne calculer en latitude et longitude que les intersections distantes de 6,000 mètres les unes des autres; pour obtenir les positions géographiques de celles qui sont comprises dans ces carrés de 6,000 mètres de côté, on partage sur la carte, en trois parties égales, les côtés des quadrilatères correspondants et on mène des droites par les points de division opposés; les positions données par leurs intersections mutuelles ne différeront pas du résultat qu'aurait fourni le calcul, vu l'échelle de la carte.

ÉQUATION DE LA LOXODROMIE.

136. La courbe que l'on suit en mer pour se transporter d'un lieu à un autre a, comme on sait, la propriété de couper tous les méridiens sous un même angle; c'est donc une spirale qui s'approche continuellement du pôle en le contournant à l'infini : on la nomme *loxodromie.*

Pour calculer son équation sur le globe supposé sphérique, considérons deux de ses points B et A infiniment rapprochés l'un de l'autre (figure 34), et désignons par R' l'angle constant CBA, compté du nord, qu'elle fait avec chaque méridien. Si l'on mène le parallèle B*b*, on formera le triangle rectangle élémentaire A*b*B, qui donnera, en appelant *a* le rayon de l'équateur, *d*P l'arc E*e*, mesure de l'angle ACB, *d*H l'accroissement de la latitude H quand on passe de B en A :

$$dP \cot R' = a\frac{dH}{\cos H} = a\frac{d \sin H}{1 - \sin^2 H},$$

parce que B*b* = *d*P cos H.

Si l'on intègre chaque membre, et qu'on prenne l'intégrale depuis le point B qui a pour latitude H' et pour longitude P', jusqu'à un point quelconque A, dont H et P sont les coordonnées géographiques, on aura pour l'équation cherchée, par rapport à l'équateur et au méridien d'où l'on compte les longitudes :

$$\text{(A)} \qquad (P-P')\cot R' = a \operatorname{Log}\frac{\operatorname{tang}\left(45° + \frac{H}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(45° + \frac{H'}{2}\right)}.$$

Lorsque $R' = o$ ou 180°, elle se réduit à $P - P' = o$, ce qui nous indique que la courbe n'est autre que le méridien du point B.

Quand $R' = 90°$ elle devient :

$$\text{Log}\,\frac{\text{tang}\left(45° + \frac{H}{2}\right)}{\text{tang}\left(45° + \frac{H'}{2}\right)} = o,$$

et ne peut être satisfaite que pour l'hypothèse $H = H'$. La courbe représente donc dans ce cas le parallèle à l'équateur qui passe par le point B; elle serait l'équateur lui-même, si l'on avait en même temps $H' = o$.

Pour obtenir l'expression de l'arc $P - P'$ en minutes, on remplacera le rayon a de la terre par sa valeur en minutes; on aura alors, après avoir converti le logarithme hyperbolique en logarithme vulgaire (article 7, séries D'), et calculé le facteur numérique $\frac{10,800'}{\pi} \times \frac{1}{M}$:

$$(1) \quad P - P' = 7915',705 \text{ tang } R' \log \frac{\text{tang}\left(45° + \frac{H}{2}\right)}{\text{tang}\left(45° + \frac{H'}{2}\right)}.$$

L'angle H se calculerait avec l'équation

$$\log \text{tang}\left(45° + \frac{H}{2}\right) = \frac{P - P'}{7915',705 \text{ tang } R'} + \log \text{tang}\left(45° + \frac{H'}{2}\right).$$

qui se déduit de la précédente.

La longueur de la partie de la courbe comprise entre deux points sera donnée par l'intégration de l'équation

$$dH = ds \cos R',$$

que donne le triangle $A\,b\,B$.

Si l'on observe que quand $H' = H$ on a $s = o$, on en tirera pour l'arc compris entre deux points connus :

$$s = \frac{H - H'}{\cos R'}. \tag{2}$$

Il restera ensuite à multiplier par a sin 1″ la valeur en secondes de cette quantité, si on veut l'avoir en mesures linéaires.

Lorsqu'on donnera quatre des six quantités H, H′, P, P′, R′, s qui entrent dans les équations (1) et (2), il sera facile de se procurer les deux autres; elles peuvent donc servir à résoudre toutes les questions relatives au pilotage.

Si l'on introduit dans l'équation (A) la base du système des logarithmes népériens, et qu'on développe tang $\left(45° + \frac{H}{2}\right)$ au moyen de la seconde des relations (8), page 7, elle prend la forme suivante après les réductions :

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{tang}\frac{H}{2} = \frac{\operatorname{tang}\left(45° + \frac{H'}{2}\right) e^{\frac{P-P'}{a}\cot R'} - 1}{\operatorname{tang}\left(45° + \frac{H'}{2}\right) e^{\frac{P-P'}{a}\cot R'} + 1}.$$

ÉQUATIONS D'UN GRAND CERCLE ET D'UN PARALLÈLE AU MÉRIDIEN SUR LA SPHÈRE.

137. 1° Le grand cercle qui passe par le point B (figure 34), et fait un angle Z′ compté du nord avec le méridien CBP′, a pour équation, relativement à l'équateur et au méridien à partir duquel on compte les longitudes :

$$\text{(c)} \qquad \operatorname{tang}\frac{H}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tang}^2\frac{H}{2}\right)\left\{\operatorname{tang} H' \cos(P-P') + \frac{\cot Z'}{\cos H'}\sin(P-P')\right\}.$$

Elle se déduit de la troisième des relations (C) de la page 9, lorsqu'on y remplace tang H par sa valeur $\frac{2 \operatorname{tang}\frac{H}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2\frac{H}{2}}$, fournie par la troisième des équations (6), page 7.

2° Pour obtenir celle du cercle $pA'Dp'$ (fig. 36) parallèle au méridien PAP′, et séparé de lui par la distance $oD = OD - Oo = P'' - P'$, menons par l'un quelconque de ses points un arc B A′ perpendiculaire à PAP′; nous aurons $BA' = oD$, et le triangle PBA′ rectangle en B nous donnera, pour la relation cherchée entre la latitude $FA' = H$ et la longitude $oF = P - P'$ d'un point quelconque du parallèle :

$$\text{(D)} \qquad \sin(P - P') = \frac{\sin(P'' - P')}{\cos H}.$$

ÉQUATIONS, SUR UNE CARTE RÉDUITE, DES PROJECTIONS DE LA LOXODROMIE, D'UN GRAND CERCLE, ET D'UN PARALLÈLE A UN MÉRIDIEN.

138. Cherchons actuellement ce que deviennent ces courbes lorsqu'on les projette sur une carte réduite.

L'équation de la loxodromie par rapport à l'équateur et au méridien du point connu B (figure 34), est (art. 136), en désignant par x les abscisses $P - P'$ exprimées en mêmes unités que le rayon a de l'équateur :

$$\text{(E)} \qquad x \cot R' = a \operatorname{Log} \operatorname{tang}\left(45° + \frac{H}{2}\right) - a \operatorname{Log} \operatorname{tang}\left(45° + \frac{H'}{2}\right).$$

Cela posé, pour connaître sur la carte le nombre de ces unités que contient l'abscisse x d'un point de la courbe correspondant à une latitude quelconque H sur le globe, il faudra introduire dans cette équation les valeurs qu'on aura adoptées pour R′, H′ et H. L'ordonnée y du même point exprimée en mêmes unités se calculera en mettant pour H sa valeur dans l'équation

$$\text{(F)} \qquad y = a \operatorname{Log} \operatorname{tang}\left(45° + \frac{H}{2}\right).$$

qui se déduit de celle de la page 174, en y supposant $e = o$.

Si donc on élimine H entre (E) et (F), on aura pour l'équation de la loxodromie sur la carte réduite :

$$y = \cot R'x + a \operatorname{Log} \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{H'}{2}\right).$$

Or elle appartient bien à une ligne droite qui fait un angle R'. avec le méridien pris ici pour axe des y, et passe par le point de la carte qui correspond à celui du globe dont la latitude est H',

139. Les équations des projections du grand cercle qui passe par le point B (figure 34), et du cercle mené par le point A' parallèlement au méridien P A P' (figure 36), s'obtiendront également en éliminant H entre l'équation (F) et chacune des équations (C), (E).

Pour arriver à ce but, nous mettrons (F) sous la forme

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{H}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{H}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{H}{2}} = e^{\frac{y}{a}},$$

et nous en déduirons ;

$$\operatorname{tang}\frac{H}{2} = \frac{e^{\frac{y}{a}} - 1}{e^{\frac{y}{a}} + 1}.$$

Cette valeur mise dans (c) donnera, après les réductions, pour l'équation cherchée de la projection d'un grand cercle, en posant $P - P' = \frac{x}{a}$, c'est-à-dire en comptant à partir du méridien de B les abscisses exprimées en mêmes unités que le rayon :

$$(G) \quad e^{\frac{y}{a}} - e^{-\frac{y}{a}} = 2\left(\operatorname{tang} H' \cos\frac{x}{a} + \frac{\cot Z'}{\cos H'} \sin\frac{x}{a}\right).$$

La projection du parallèle au méridien s'obtiendra en observant qu'en vertu de la dernière des relations (7) de la page 7 et de la valeur précédente de tang $\frac{H}{2}$ on a

$$\cos H = \frac{1 - \tan g^2 \frac{H}{2}}{1 + \tan g^2 \frac{H}{2}} = 2 \frac{e^{\frac{y}{a}}}{e^{2\frac{y}{a}} + 1} = \frac{\sin(P''-P')}{\sin(P-P')};$$

par conséquent on aura définitivement, en posant $P - P' = \frac{x}{a}$, $P'' - P' = \frac{x'}{a}$:

$$\text{(H)} \qquad \sin \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \sin \frac{x'}{a} \left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} \right).$$

Ces résultats nous montrent que les projections des grands cercles et des parallèles à un méridien sont des courbes transcendantes.

Lorsque dans (G) $Z' = O$, on a $x = o$; ainsi le méridien du point B (figure 36) est représenté sur la carte (figure 39) par l'axe bp des y, ce que nous savions déjà.

Pour $y = o$, on trouve tang $\frac{x}{a} = - \sin H'$ tang Z'; par conséquent la courbe coupe l'équateur en deux points situés de chaque côté du méridien bp, à des distances représentées par $-x'$ et $+(\pi a - x')$.

Il est facile de voir que la plus grande valeur de y sera celle qui correspondra à la grandeur de H fournie par la relation

$$\cos H = \cos H' \sin Z',$$

et que la courbe sera symétrique de chaque côté de cette ordonnée oi (figure 39).

Si, par l'un quelconque de ses points, on mène une

tangente, et qu'on cherche l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle forme avec le méridien de ce point, on trouvera :

$$\tang \alpha = \frac{1}{\cos H \left(\frac{\cot Z'}{\cos H'} \cos \frac{x}{a} - \tang H' \sin \frac{x}{a}\right)}.$$

Pour le point b, où $H = H'$ et $x = o$, on a :

$$\tang z' = \frac{1}{\cot Z'};$$

par conséquent l'angle $tbt' = z'$ est le même que l'angle $CBA = Z'$ sur la sphère.

L'hypothèse $Z' = 90°$ dans (G) donne, pour l'équation de la projection d'une section perpendiculaire au méridien N S :

$$(1) \qquad e^{\frac{y}{a}} - e^{-\frac{y}{a}} = 2 \tang H' \cos \frac{x}{a}.$$

En posant dans celle-ci $y = o$, on trouve $x = \pm \frac{\pi a}{2}$. Ainsi toutes les projections des grands cercles perpendiculaires à un méridien vont concourir, sur la carte réduite, en deux points de l'équateur situés de chaque côté de ce méridien, à une distance égale au quart de la longueur adoptée pour représenter le développement de l'équateur (figure 39). Il est clair que dans ce cas la plus grande valeur de y est celle qui correspond à $H = H'$.

Au lieu de se servir des équations (G) ou (1), pour construire par points la courbe qu'elles représentent, il sera plus commode d'avoir recours aux suivantes, desquelles on les a déduites :

$$(\text{G}')\ \begin{cases} \tang H = \tang H' \cos x + \frac{\cot Z'}{\cos H'} \sin x, \\ y = 7915',705 \log \tang\left(45° + \frac{H}{2}\right). \end{cases}$$

$$(\text{I}')\ \begin{cases} \cos x = \frac{\tang H}{\tang H'}, \\ y = 7915',705 \log \tang\left(45° + \frac{H}{2}\right). \end{cases}$$

On aura alors les valeurs de x et y exprimées en minutes.

La première n'est autre que (c) où l'on a remplacé $\frac{2\tang \frac{H}{2}}{1-\tang^2 \frac{H}{2}}$ par sa valeur tang H; la troisième résulte de celle-ci, lorsqu'on suppose $Z'=90°$; enfin la seconde découle de (F) lorsqu'on exprime le rayon a de l'équateur en minutes et qu'on transforme le logarithme hyperbolique en logarithme vulgaire.

On verra aisément, en discutant l'équation du parallèle, qu'elle est symétrique par rapport au méridien situé à 90° de celui à partir duquel on compte les abscisses, et que la plus grande valeur de y est celle qui correspond à $H=90°-x'$. On la construira par points avec les équations

$$(\text{H}')\ \begin{cases} \sin x = \frac{\sin x'}{\cos H}, \\ y = 7915',705 \log \tang\left(45° + \frac{H}{2}\right). \end{cases}$$

CORRECTION QUE DOIT SUBIR UN AZIMUT AVANT D'ÊTRE RAPPORTÉ SUR UNE CARTE RÉDUITE.

140. L'azimut Z' d'un objet A (figure 34), sur l'horizon d'un point B, a pour mesure, comme on sait, l'angle

TBT′ des tangentes BT, BT′ menées en ce point au méridien CB et au grand cercle BA.

Or si l'on projette ces diverses lignes sur une carte réduite (figure 39), le méridien et sa tangente viendront se confondre avec le méridien rectiligne tp qui passe par le point b correspondant à B; l'arc BA sera représenté par la courbe ba, et la tangente BT′ par la tangente bt' (page 182). Par conséquent, l'angle observé Z′ n'indiquera sur la carte réduite la direction du point a, projection de A, qu'autant qu'on l'aura augmenté de la petite quantité $t'\,b\,a = d\,z'$. M. l'ingénieur hydrographe Givry, qui a le premier tenu compte de cette correction, a trouvé pour l'expression générale de sa valeur :

$$dz' = \frac{dP'}{2} \sin H'.$$

Voici comment on peut arriver à ce résultat qui n'est qu'approximatif, mais qui suffit toujours pour l'usage qu'on en fait.

Désignons par R′ l'angle du rumb de vent qu'il faudrait suivre pour aller du point B (figure 34) au point A, et cherchons sa valeur en fonction de l'azimut CBA = Z′. Nous aurons d'abord (figure 39) :

$$R' = Z' + dz',$$

et

$$(1) \qquad \operatorname{tang}(Z' + dz') = \frac{ac}{bc} = \frac{a\,dP'}{a \operatorname{Log} \dfrac{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{H''}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{H'}{2}\right)}};$$

H′, H″ représentant sur le globe les latitudes des deux points

B et A qu'on suppose peu éloignés l'un de l'autre, et dP' leur différence en longitude.

Or (série (c'), page 14),

$$\text{Log}\frac{\tang\left(45^\circ+\frac{H''}{2}\right)}{\tang\left(45^\circ+\frac{H'}{2}\right)}=2\frac{\tang\left(45^\circ+\frac{H''}{2}\right)-\tang\left(45^\circ+\frac{H'}{2}\right)}{\tang\left(45^\circ+\frac{H''}{2}\right)+\tang\left(45^\circ+\frac{H'}{2}\right)},$$

en négligeant les autres termes, vu leur petitesse; et en vertu de la première des relations (3) de la page 6, ce second membre équivaut à

$$\frac{\sin\left\{\left(45^\circ+\frac{H''}{2}\right)-\left(45^\circ+\frac{H'}{2}\right)\right\}}{\sin\left\{\left(45^\circ+\frac{H''}{2}\right)+\left(45^\circ+\frac{H'}{2}\right)\right\}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(H''-H')}{\cos\frac{1}{2}(H''+H')}.$$

D'un autre côté, on tire de la quatrième analogie de Néper (page 10), après avoir posé $a=90^\circ-H'$, $b=90^\circ-H''$, $C=dP'$, $B=Z'$:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(H''-H')}{\cos\frac{1}{2}(H''+H')}=\frac{dP'}{2}\tang\tfrac{1}{2}(A-Z');$$

mais

$A=180^\circ-(Z'+$ convergence des méridiens de A et de B), (article 111); donc

$$\tfrac{1}{2}(A-Z')=90^\circ-\left(Z'+\frac{\text{convergence}}{2}\right),$$

et par suite

$$\text{Log}\frac{\tang\left(45^\circ+\frac{H''}{2}\right)}{\tang\left(45^\circ+\frac{H'}{2}\right)}=dP'\cot\left(Z'+\frac{\text{convergence}}{2}\right).$$

Substituant cette valeur dans (1), il vient :

$$\tang(Z'+dz')=\tang\left(Z'+\frac{\text{convergence}}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$dz' = \frac{\text{convergence}}{2} = \frac{dP'}{2} \sin \tfrac{1}{2} (H'+H'') \text{ (article 111)};$$

ou généralement, à cause du peu de différence qu'on suppose exister entre les latitudes des deux points que l'on considère :

$$\text{Correction d'azimut} = \frac{dP}{2} \sin H.$$

(On trouvera une analyse approfondie de la question que nous venons de traiter dans la thèse d'astronomie soutenue en 1837, devant la faculté des sciences de Lyon, par M. Bravais, enseigne de vaisseau.)

Il résulte de ce qui précède que, pour rapporter sur une carte réduite (figure 22) la position d'un objet M au moyen de ses azimuts Z, Z' observés à deux stations A, A', il faut augmenter ou diminuer chacun d'eux d'une petite quantité qui a pour expression *le produit du sinus de la latitude de la station où il a été observé par la moitié de la différence de longitude qui existe entre chacune de ces stations et le point qu'on veut déterminer.* On n'aura aucune incertitude sur le signe de cette correction, si l'on fait attention à la remarque de l'article 141.

La correction que devra subir l'angle KAL (figure 22) observé entre deux objets, pour être projeté sur la carte, sera égale à la somme ou à la différence de celles qui sont relatives aux azimuts de chacun de ces points, selon qu'ils se trouveront de côtés différents ou du même côté du méridien sous lequel l'observation a été faite.

141. Pour se procurer la différence en longitude dP, qui sert à calculer la correction dont nous nous occupons

on commence par placer le point M sur la carte, en se servant des azimuts observés, puis on évalue à l'aide d'un compas le nombre de minutes comprises entre son méridien et ceux de A et A'; avec cette donnée, on pourra calculer dz à une minute près, ce qui est toujours assez exact pour des constructions graphiques; on recommencera ensuite la construction précédente pour marquer définitivement la position réelle du point en question. *Elle devra toujours se trouver moins élevée en latitude que celle qui aura été obtenue primitivement avec les azimuts non corrigés.*

Lorsque les points B et A diffèrent entre eux de 1° en latitude et de 1° en longitude, cette correction est de 12',9 sous le parallèle de 25°; elle s'élèverait, dans la même hypothèse, à 29',6 sous celui de 80°; par conséquent, elle ne peut être négligée que dans les environs de l'équateur.

CHAPITRE XII.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES SUR LA MESURE DES BASES ET DES ANGLES, ET APPLICATIONS DES DIVERSES FORMULES DONNÉES DANS LES CHAPITRES PRÉCÉDENTS.

142. Les tableaux et les exemples renfermés dans ce chapitre sont destinés à indiquer la manière de tenir les cahiers d'observation et la marche à suivre pour faire usage des formules démontrées dans cet ouvrage. Il est bon que l'on adopte un système uniforme dans tous les calculs de même espèce; on y trouvera le double avantage d'effectuer les opérations beaucoup plus promptement, et de pouvoir obtenir sans recherches pénibles dans les cahiers de rédaction la valeur de telle quantité dont on aura besoin.

MESURE DES BASES, CHAP. III.

143. Pour mesurer une base avec exactitude, on emploiera trois règles ayant chacune au moins trois mètres de longueur; elles seront ou de bois de sapin trempé dans l'huile bouillante, ou de fer doux forgé. Sur chacune d'elles sera inscrite sa longueur à la température sous laquelle elle a été étalonnée; de plus, leurs extrémités, taillées à vives arêtes, devront être peintes de différentes couleurs, afin de guider pour les porter toujours dans le même sens à la suite l'une de l'autre. Le petit intervalle qu'on laissera entre elles, de crainte de les déranger en les mettant en contact, se

mesurera en y introduisant un coin divisé en millimètres qu'on tiendra suspendu par un fil; leur inclinaison s'évaluera au moyen d'un niveau à perpendicule. Dans le cas où elles ne seront pas disposées convenablement pour faire usage du coin, on emploiera le fil à plomb pour placer dans la même verticale les deux extrémités qui devraient coïncider, et on tiendra compte du diamètre de ce fil, s'il est appréciable; on notera en outre la température de chacune d'elles, et on aura soin qu'elles ne soient pas exposées à l'action directe des rayons solaires pendant le cours des observations.

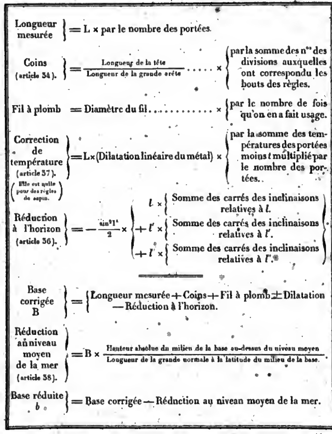
144. Les deux tableaux suivants indiquent l'un la série de ces observations, l'autre les divers calculs à effectuer pour réduire au niveau de la mer la base mesurée. On a désigné par l, l', l'' les longueurs en mètres de chaque règle à la température t de l'étalonnage, et par L leur somme dont se compose chaque *portée*.

ÉLÉMENTS POUR LE CALCUL D'UNE BASE.

NUMÉROS des règles.	THERMOMÈTRES.	COIN.	NIVEAU VERS LE TERME		INCLINAISON moyenne.
			EST, avant le retournement.	OUEST, après le retournement.	
1. l	T degrés.	n parties	Deg......Min.	Deg......Min.	Deg......Min.
2. l'	T'	n'	Deg......Min.	Deg......Min.	Deg......Min.
3. l''	T''		Deg......Min.	Deg......Min.	Deg......Min.
Somme des trois règles : L	Température moyenne de la portée ou de L : $\frac{T+T'+T''}{3}$				
1. l	T	$\frac{n+n'}{2}$ parties.	Deg......Min.	Deg......Min.	Deg......Min.
2. l'	T'	Fil à plomb.	Deg......Min.	Deg......Min.	Deg......Min.
3. l''	T''		Deg......Min.	Deg......Min.	Deg......Min.
L	$\frac{T+T'+T''}{3}$				

Nota. Si les bouts de deux règles correspondaient à deux divisions différentes du coin (page 50), on l'indiquerait dans la colonne ; on inscrira aussi chaque fois qu'on aura fait usage du fil à plomb.

CALCUL D'UNE BASE.



Longueur mesurée	= L × par le nombre des portées.	
Coins (article 34).	$= \frac{\text{Longueur de la tête}}{\text{Longueur de la grande arête}}$ ..... ×	par la somme des n[os] des divisions auxquelles ont correspondu les bouts des règles.
Fil à plomb	= Diamètre du fil............... ×	par le nombre de fois qu'on en a fait usage.
Correction de température (article 37). (Elle est nulle pour des règles de sapin.)	= L × (Dilatation linéaire du métal) ×	par la somme des températures des portées moins t multiplié par le nombre des portées.
Réduction à l'horizon (article 36).	$= -\frac{\sin^2 1''}{2} \times$	(l × Somme des carrés des inclinaisons relatives à l. + l' × Somme des carrés des inclinaisons relatives à l'. + l'' × Somme des carrés des inclinaisons relatives à l''.)
Base corrigée B	= Longueur mesurée + Coins + Fil à plomb ± Dilatation — Réduction à l'horizon.	
Réduction au niveau moyen de la mer (article 38).	$= B \times \frac{\text{Hauteur absolue du milieu de la base au-dessus du niveau moyen}}{\text{Longueur de la grande normale à la latitude du milieu de la base.}}$	
Base réduite b	= Base corrigée — Réduction au niveau moyen de la mer.	

Nota. La hauteur absolue du milieu de la base au-dessus du niveau moyen de la mer est exprimée par $h = h' \pm \frac{B \times I \times \sin 1''}{2}$, h' étant la

hauteur absolue de l'une de ses extrémités au-dessus de ce niveau, et I le nombre de minutes qui indique l'inclinaison de l'autre sur l'horizon de celle-ci. Cet angle s'obtient en prenant la distance zénithale $z = 90^\circ \pm I$; mais on pourra presque toujours considérer I comme nul, et par suite supposer $h = h'$. Cette dernière quantité se détermine ou par un nivellement géodésique ou par des observations barométriques (articles 99 et 102).

MESURE DES ANGLES.

145. Les angles qui font partie des triangles principaux d'un canevas géodésique ne doivent pas être répétés chacun moins de *trente fois*, par *trois séries* prises à divers instants de la journée et dans chacune desquelles ils se trouvent répétés dix fois. Si cependant on était pressé par le temps, on pourrait se contenter de deux séries; on obtiendrait encore des résultats assez satisfaisants avec de telles observations faites avec soin.

Les distances zénithales se déterminent par une seule série de *seize fois* l'angle, ou par *deux séries* dont chacune le comprend *huit fois*. On choisira pour ces observations l'instant de la journée où la réfraction exercera le moins d'influence sur les résultats.

Au commencement et à la fin de chaque série, on lira les *quatre* verniers de la lunette; mais, dans les observations intermédiaires, on se contentera de noter seulement les indications fournies par ceux de l'oculaire et de l'objectif, afin de voir la marche de la série. Si l'on était obligé d'opérer le plus promptement possible, on lirait seulement le premier angle, celui du milieu de la série, et le dernier.

A la suite de chaque station, on inscrira la distance de l'instrument au centre du signal, ainsi que la direction de

ce centre relativement à l'un des points qu'on a relevés, ou bien les éléments nécessaires pour se procurer ces quantités (articles 60 et 61); on y joindra la hauteur dH du sommet du signal au-dessus de l'instrument, et celle dT de l'instrument au-dessus du sol. Si la première de ces quantités ne peut s'obtenir par des mesures directes, on aura recours aux procédés de l'article 83.

A chaque station on relèvera les points secondaires ou autres objets remarquables qui paraîtront disposés convenablement pour former des triangles dont la base sera l'un des côtés du réseau principal; mais on ne répétera pas ces angles. Pour les observer, on dirigera sur l'un des signaux principaux la lunette fixée au zéro; puis, après avoir arrêté le théodolite dans cette position, on la détachera et on relèvera successivement tous les points de l'horizon. C'est ainsi que se font les stations aux signaux et aux points secondaires. On emploie à cet effet un petit théodolite non répétiteur de $0^m,15$ de diamètre, dont le vernier donne 30″. On a soin de lire à chaque observation les degrés, minutes et secondes auxquels correspondent l'oculaire et l'objectif. On compose ensuite au moyen de ces observations les angles de chaque triangle. Il vaudrait certainement mieux les observer séparément; mais, en suivant cette marche, on perdrait beaucoup de temps. Il est également inutile de faire station à tous les points du troisième ordre; il faudra seulement les relever des signaux appartenant à la triangulation principale ou secondaire (articles 17 et 70).

146. Le tact et l'expérience apprendront à ne pas relever des objets que leur éloignement et leur position,

relativement aux points environnants, rendent tout à fait impropres à former des triangles. Le seul cas où ces relèvements éloignés seront utiles sera celui où l'on voudra savoir si, par suite des petites erreurs commises dans la mesure des angles de chaque triangle, un sommet du réseau se trouve hors du plan azimutal que ce relèvement aura fait connaître.

TENUE DES CAHIERS D'OBSERVATIONS.

147. Les deux tableaux suivants indiquent la manière de tenir les cahiers d'observations. En tête de chaque série on écrit les noms des deux signaux qu'on veut relever, en commençant par celui qui se trouve à gauche de l'observateur; avec cette précaution, on sait de suite de quelles distances on a besoin pour les réductions au centre.

STATION AU SIGNAL M (figure 22).
(L'instrument dont on s'est servi est un théodolite à limbe vertical.)

SIGNAL L ET SIGNAL N.

	ANGLES multiples.	VERNIERS.			MOYENNE des verniers.	QUANTITÉ à ajouter ou à retrancher	ANGLES simples.
	0° 0′ 0″	58″	56″	58″	58″	+ 2″	
1	42 53 17	...	17	...	17		42° 53′ 17″00
2	85 46 40	...	38	...	39		42 53 19,50
3	128 40 2	...	7	...	4,5		42 53 21,50
4	171 33 18	...	22	...	20		42 53 20,00
5	214 26 30	28	25	27	27,5		42 53 17,50
6	257 19 48	...	52	...	50		42 53 18,33
7	300 13 23	...	20	...	21,5		42 53 20,21
8	343 6 37	...	32	...	34,5		42 53 19,31
9	25 59 48	...	45	...	46,5		42 53 18,50
10	68 53 13	18	16	18	16,2		42 53 19,62
							+ 2,00
					Angle simple.........		42° 53′ 21″62

DISTANCE ZÉNITHALE DU SIGNAL L.

	ANGLES multiples.	VERNIERS.			MOYENNE des verniers.	QUANTITÉ à ajouter ou à retrancher	ANGLES simples.
	0° 0′ 0″	58″	56″	58″	58″	+ 2″	
2	178 0 38	...	32	...	35		89° 0′ 17″5
4	356 1 28	...	25	...	22,5		89 0 20,6
6	174 1 48	...	52	...	50		89 0 18,3
8	352 2 37	35	37	37	36,5		89 0 19,56
							+ 2,00
					Angle simple.........		89° 0′ 21″56

$dH = 5^m,00$, $dT = 15^m,00$, Distance au centre $= 5^m,00$.

STATION SECONDAIRE AU SIGNAL M.

NOMS DES POINTS.	OCULAIRE.	OBJECTIF.	QUANTITÉ à ajouter ou à retrancher
Signal L (départ des angles).	0° 0′ 0″	179° 59′ 58″	+ 1″
Signal A................	336 49 8	156 49 13	
Signal P................	68 20 27	248 20 33	
Signal O................	82 28 43	262 28 50	
Direction du centre........	111 10	291 10	

Distance au centre $= 6^m,00$.

CORRECTIONS QUE DOIVENT SUBIR LES ANGLES OBSERVÉS À CHAQUE SIGNAL.

148. 1° *Correction relative à l'excentricité de la lunette inférieure dans le cercle répétiteur* (article 57).

$$\epsilon = \pm\left(\frac{\frac{1}{2}e}{D\sin 1''} - \frac{\frac{1}{2}e}{G\sin 1''}\right).$$

e représente la distance de l'axe de la lunette au centre du

limbe, D et G les distances du point de station aux objets de droite et de gauche; le signe inférieur convient au cas où l'excentricité est à gauche.

Correction relative à l'excentricité de la lunette dans le théodolite répétiteur à limbe vertical (article 58).

$$\epsilon = \pm\left(\frac{e'}{D\sin 1''} - \frac{e'}{G\sin 1''}\right).$$

Les lettres e', D, G ont la même signification que ci-dessus. Cette correction sera beaucoup plus considérable que pour le cercle répétiteur, à cause de la distance e' qui est généralement quatre ou cinq fois plus grande que e; néanmoins on pourra presque toujours la négliger dans la mesure des angles secondaires. (Application à la page 199.)

2° *Réduction d'un angle au centre de la station* (article 59).

$$\text{Correction} = \frac{r\sin(O+y)}{D\sin 1''} - \frac{r\sin y}{G\sin 1''}.$$

O est l'angle observé;

y celui que fait l'objet de gauche avec la direction du centre; *il se compte de 0° à 360°, en allant de l'objet de gauche vers la gauche;*

r est la distance de la station au centre; elle est exprimée en mêmes unités que D et G, qui représentent les distances du signal où l'on observe aux objets de droite et de gauche. (Application à la page 199.)

Comme il suffit d'avoir les valeurs approchées de ces deux dernières quantités, on les calculera avec cinq décimales seulement à leurs logarithmes, en employant les angles bruts de chaque station. Pour les points secondaires,

on se contentera de prendre ces distances sur le canevas où on les aura placés graphiquement au moyen de leurs relèvements pris des points principaux. On fera attention dans le calcul aux grandeurs des angles $O + y$ et y d'où dépendent les signes de leurs sinus, et par suite ceux des termes de la formule. Enfin, si des mesures directes n'avaient pas fait connaître les éléments r et y, on se procurerait au moyen des équations des arts (60 et 61), car généralement on sera toujours dans l'un des cas qui y sont énoncés.

3° *Correction qu'on doit faire subir à l'angle compris entre deux signaux pour obtenir celui qui existe entre l'un d'eux et le centre de l'édifice sur lequel l'autre est placé* (article 62).

$$\alpha = \frac{r \sin c}{D \sin 1''} \left(1 + \frac{r \cos c}{D}\right).$$

Le premier terme de cette formule suffit généralement; les lettres r et D représentent l'une l'excentricité du signal, l'autre sa distance à celui où il faut corriger l'angle observé; c est l'angle compris entre ces deux lignes. Il se compte de 0° à 360°, en allant de gauche à droite; le signe de son sinus indique alors si la correction est additive ou soustractive; du reste, on n'aura presque jamais besoin de cette correction.

$r = 10^m00$, $c = 51° 15'$, $D = 57836^m$.

CALCUL DU 1er TERME.	CALCUL DU 2e TERME.
comp. log sin 1″ = 5,31443	log 1er terme = 1,44427
comp. log D = 5,23781	comp. log D = 5,23781
log r = 1,00000	log r = 1,00000
log sin c = 9,89203	log cos c = 9,79652
log 1er terme = 1,44427	log 2e terme = 7,47860
1er terme = 27″81	2e terme = 0″003

4° *Réduction des angles à l'horizon* (article 63).

Dans les formules suivantes h désigne l'angle observé entre deux points, z la distance zénithale de l'un, z' celle de l'autre, H l'angle réduit, et $s = \frac{h + z + z'}{2}$.

La première, qui est rigoureuse, donne immédiatement l'angle réduit à l'horizon; on en fait usage lorsque les distances zénithales diffèrent de l'angle droit de plus de deux ou trois degrés.

La seconde, qui est plus simple, fait connaître la correction que doit subir l'angle observé; quoique approximative elle est généralement d'une exactitude suffisante.

$$\sin \tfrac{1}{2} H = \left\{ \frac{\sin\left(\frac{h+z+z'}{2} - z\right) \sin\left(\frac{h+z+z'}{2} - z'\right)}{\sin z \sin z'} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$H - h = \left(90^\circ - \frac{z+z'}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h \sin 1'' - \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} h \sin 1''.$$

(Voir le tableau de la page 199 pour l'application de cette dernière formule.)

CALCUL D'UNE RÉDUCTION À L'HORIZON PAR LA PREMIÈRE FORMULE.

On suppose que l'angle observé au signal M (figure 22), entre L et N, avec un cercle répétiteur, est de .... 42° 52′ 54″00

$h =$	42° 52′ 54″00		
$z =$	88 27 12,20		
$z' =$	89 0 21,56		
$2s =$	220 20 27,76		
$s =$	110 10 13,88	$s =$	110 10 13,88
$z =$	88 27 12,20	$z' =$	89 0 21,56
$s - z =$	21 43 1,68 ..	$s - z' =$	21 9 52,32
log sin $(s-z) =$	9,5682306		
log sin $(s-z') =$	9,5575642		
compl. log sin $z =$	0,0001583		
compl. log sin $z' =$	0,0000654		
2 log sin $\frac{1}{2}$ H $=$	19,1260185		
log sin $\frac{1}{2}$ H $=$	9,5630092		
$\frac{1}{2}$ H $=$	21° 26′ 40″80	H $=$	42° 53′ 21″60
		$h =$	42 52 54,00
		Correction ou H — $h =$	+ 27″60

L'emploi de la seconde formule donnerait 27,61

5° Correction relative aux phases des signaux.

On pourra presque toujours s'affranchir de cette correction, si l'on opère de la manière indiquée à l'article 65. Dans le cas où l'on serait obligé d'en tenir compte, on aurait recours aux formules de l'article 66.

Marche à suivre pour calculer les corrections précédentes.

149. Pour procéder avec ordre dans les diverses réductions dont on vient de parler, on fera successivement toutes celles qui sont relatives aux angles d'une même station. A cet effet, après avoir composé les angles de chaque triangle, on inscrira chacun d'eux sur une page séparée avec tous les éléments de réduction qu'on disposera de la manière indiquée dans le tableau ci-joint. On inscrira au bas de la page les dH et les dT, afin d'avoir sous les yeux toutes les données nécessaires à la formation des triangles du premier ordre et à la détermination des différences de niveau de leurs sommets.

La plupart du temps, on n'aura à calculer qu'un seul terme de la réduction au centre, parce que l'autre aura été obtenu dans les réductions précédentes. Si la distance r et l'angle y relatifs à cette correction n'étaient pas donnés immédiatement, on les calculerait sur un cahier à part. On fera de même sur un cahier particulier les réductions des angles secondaires.

Calculs relatifs à la réduction d'un angle aux centres de l'instrument et de la station, et à l'horizon.

STATION AU SIGNAL M (figure 22).

SIGNAL L ET SIGNAL N.

$G = 42390^m00$ $e' = 0^m135$ $r = 5^m00$ $D = 57836^m00$

Angle observé avec le théodolite à limbe vertical........ O= 42°53′21″62

$O+y=$ 291° 43′ $y=$ 248° 50′

1° *Correction d'excentricité.*

$\log e'=$ 9,13033
compl. log sin 1″= 5,31443
$\log \frac{e'}{\sin 1''}=$ 4,44476.................. 4,44476
compl. log D= 5,23781 compl. log G= 5,37275
log 1er terme= 9,68257 log 2e terme= 9,81749
1er terme= + 0″48.... 2e terme= — 0″66.

Excentricité... — 0,18
Réd^on au centre —39,26
Angle réduit = 42°52′42″18
α= +27,80
42°53′ 9″98
Correction d'excentricité..= — 0″18

2° *Réduction au centre.*

$\log r=$ 0,69897
compl. log sin 1″= 5,31443
$\log \frac{r}{\sin 1''}=$ 6,01340.................. 6,01340
log sin (O+y)= 9,96805 log sin y= 9,96966
compl. log D= 5,23781 compl. log G= 5,37275
log 1er terme= 1,21924 log 2e terme= 1,35579
1er terme= - 16″57.... 2e terme= - 22″69 Réd^on au centre = —39″26

Angle observé avec le cercle répétiteur.................. O= 42°52′54″00

3° *Réduction à l'horizon.*

$z=$ 88°27′12″20 $h=$ 42°52′54″00
$z'=$ 89 0 21,56 $\frac{h}{2}=$ 21 26 27,00
$z+z'=$ 177 27 33,76 $z'-z=$ 0 33 9,36
$\frac{z+z'}{2}=$ 88 43 46,88 $\frac{z'-z}{2}=$ 0 16 34,68

Excentricité... 0,00
Réd^on au centre —39,26
Réd^on à l'horizon +27,61
42°52′42″55

$90° - \frac{z+z'}{2}=$ 1 16 13,12 = 4573″12

log sin 1″= 4,08557 4,68557
log tang $\frac{h}{2}=$ 9,59408 log cot $\frac{h}{2}=$ 0,40591
$2\log\left(90° - \frac{z+z'}{2}\right)=$ 7,32042 $2\log\left(\frac{z'-z}{2}\right)=$ 5,99536
log 1er terme= 1,60007 log 2e terme= 1,08684
1er terme= + 39″82.... 2e terme — 12″21 Réd^on à l'horizon = + 27″61

$dH = 5^m00$ $dT = 15^m00$

Nota. La correction α est celle qui est relative à la réduction de l'angle au centre de l'édifice sur lequel l'un des signaux est placé ; ses éléments sont : $r' = 10^m,00$, $D = 57836^m$, $c = 51° 15'$ page 196.

CALCULS DES CÔTÉS DES TRIANGLES PRINCIPAUX, ET DÉTERMINATION DES COORDONNÉES DE LEURS SOMMETS.

150. La somme de trois angles de chaque triangle est égale à

180° + Excès sphérique + Erreur des observations.

Pour calculer la longueur de leurs côtés, on répartit sur chaque angle le tiers de l'excès en plus ou en moins de leur somme sur 180° ; puis on résout comme rectiligne le triangle qui résulte de cette modification. On calcule néanmoins l'excès sphérique dans la triangulation du premier ordre, afin de connaître la somme des erreurs commises dans la mesure des trois angles de chaque triangle, ainsi que les angles sphériques moyens dont on a besoin pour le calcul des positions géographiques des sommets principaux du réseau.

Excès sphérique.

Il a pour expression :

$$\epsilon = \frac{1}{2\,R^2 \sin 1''}\,ab \sin C,$$

R étant le rayon de la terre (page 17), a, b deux des côtés du triangle, et C l'angle qu'ils comprennent. En calculant la valeur du terme constant, on a :

$$\log \text{Excès sphérique} = 1{,}40557 + \log (ab \sin C).$$

Si les longueurs des côtés des triangles étaient évaluées en toises, le logarithme de $\frac{1}{2R^2 \sin 1''}$ serait 1,98522.

EXCÈS SPHÉRIQUE DU TRIANGLE CALCULÉ DANS LE TABLEAU SUIVANT.

1° *Calcul avec les côtés m, n et l'angle compris L.*	2° *Vérification avec les côtés m, l et l'angle compris N.*
log constant $\frac{1}{2R^2 \sin 1''}$ = 1,40557	log constant = 1,40557
log m = 4,59505	log m = 4,59505
log n = 4,62728	log l = 4,76220
log sin L = 0,00000	log sin N = 9,86509
log Excès sphérique = 0,62790	log Excès sphérique = 0,62791
Excès sphérique = 4''25.	Excès sphérique = 4''25.

Calcul d'un triangle.

151. On écrira en premier le nom du sommet à déterminer, puis au-dessous ceux des deux autres signaux qui sont, l'un à sa droite, l'autre à sa gauche; viendra ensuite le gisement apparent du précédent, par rapport à celui-ci. Pour les calculs, on suivra la marche tracée dans le tableau suivant, où l'on se propose de déterminer le sommet M du triangle MNL (fig. 22), dans lequel on suppose connus, par la résolution des triangles qui le précèdent, la base NL = m, les coordonnées de N et de L, relativement à l'origine A des axes, et le *gisement apparent* de l'un de ces points par rapport à l'autre, c'est-à-dire l'angle que forme la droite NL avec une parallèle à AY.

152. Lorsqu'on calcule les points secondaires, on ne tient pas compte des fractions de seconde, et on se dispense d'évaluer l'excès sphérique; on ne cherche même pas les nombres correspondants aux logarithmes de leurs côtés (article 70).

Calcul des côtés d'un triangle et des distances de son sommet à la méridienne et à la perpendiculaire d'un lieu connu.

SIGNAL M.

SIGNAUX.	ANGLES OBSERVÉS et réduits.	ANGLES MOYENS.	ANGLES SPHÉRIQUES.	CÔTÉS OPPOSÉS.
Signal M.	42° 53′ 9″08	42° 53′ 9″97	42° 53′ 11″38	m = 39350m80
Signal N.	47 8 10,03	47 8 10,02	47 8 11,43	n = 42392m18
Signal L.	89 58 40,01	89 58 40,01	89 58 41,42	l = 57836m03
	180° 0′ 0″,02		180° 0′ 4″23	

Excès sphérique.. 4″,25

Erreur due aux observations .....–4″,23

Signal N. 7° 51′ 39″09 N.O. de L.	Signal L. 7° 51′ 39″09 S.E. de N.
Signal L. 89 58 40,01	Signal N. 47 8 10,02
Signal M. 82° 7′ 0″92 N.E. de L = Z	Signal M. 54° 59′ 49″11 S.E. de N = Z′

$\log m = 4,5950540$

$\log \sin M = 9,8528356$

$\log \frac{m}{\sin M} = 4,7621984$ 4,7621984

$\log \sin N = 9,8650873$ — $\log \sin L = 0,0000000$

$\log n = 4,6272857$ .... 4,6272837 — $\log l = 4,7621984$ 4,7621984

$\log \sin Z = 9,9958764$ $\log \cos Z = 9,1572021$ $\log \sin Z' = 9,9133485$ $\log \cos Z' = 9,7586241$

$\log x' = 4,6231621$ $\log y' = 3,7644878$ $\log x'' = 4,6735469$ $\log y'' = 4,5208225$

x'	y'	x''	y''
Signal M. 41991,57 Est	5814,17 N. du sign. L.	Signal M. 47374,74 Est	35175,88 S. du sign. N.
Signal L. 30822,49 Est	36566,53 N. du sign. A.	Signal N. 25439,33 Est	73556,58 N. du sign. A.
Signal M. 72814,06 Est	42380,70 Nord.	72814,07 Est	42380,70 Nord.

Signal M... $\left\{ \begin{array}{l} x = 72814,06 \text{ Est} \\ y = 42380,70 \text{ Nord} \end{array} \right\}$ du signal A.

Calcul de la distance de deux points connus par leurs coordonnées rectangulaires.

153. Si l'on voulait actuellement connaître la distance $AM = D$ du point M au point A, ainsi que le gisement apparent $YAM = Z$, on opérerait de la manière suivante :

$\log x = 4,8622153$	$\log x = 4,8622153$	$\log y = 4,6271682$
$\log y = 4,6271682$	$\log \sin Z = 9,9366469$	$\log \cos Z = 9,7015998$
$\log \tang Z = 0,2350471$	$4,9255684$	$4,9255684$

$Z = 59^\circ\ 47'\ 55'',97$, $\quad D = 84249^m,69$.

Si, au moyen des positions géographiques de A et de M, déduites des formules géodésiques, on calcule les *coordonnées véritables* $a''M'$, $a''A$ (fig. 20) du second point, relativement au premier, ainsi que le *gisement vrai* $Z = a''AM'$ et la distance $AM' = D$ par la méthode donnée dans le chapitre X, on trouve :

$x = 72814^m,72$ Est, $\quad y = 42378^m,46$ Nord,
$Z = 59^\circ\ 48'\ 1''48$, $\quad D = 84249^m,15$;

en sorte que les valeurs obtenues plus haut, en passant par *quatre* triangles pour aller de A en M, sont en erreur sur celles-ci de :

$-\ 0^m,65$, $\quad +\ 2^m,24$, $\quad -\ 5''51$, $\quad +\ 0^m,54$.

D'un autre côté, les coordonnées de M, par rapport à l'origine A' (fig. 22) et à la méridienne véritable A'Y' de ce point, seraient, en suivant la chaîne des *douze* triangles qui unit ces deux positions :

$x' = 69077^m,33$ Ouest, $\quad y' = 44446^m,59$ Nord;

et on en déduirait pour le gisement apparent et la distance :

$Z' = 57° 14' 29''26$, $D' = 82141^m,20$.

Calculant de nouveau ces mêmes quantités, avec les positions géographiques de M et de A', on trouverait :

$x' = 69060^m,23$ Ouest, $y' = 44443^m,50$ Nord,

$Z' = 57° 14' 12''55$, $D' = 82125^m,16$.

Les valeurs précédentes diffèrent donc avec celles-ci de

$+ 17^m,10$, $+ 3^m,09$, $+ 16''71$, $+ 16^m,04$.

Ainsi les erreurs s'accumulent lorsqu'on calcule les coordonnées absolues d'un point par une longue suite de triangles. S'ils sont en petit nombre, on peut obtenir ces longueurs assez exactement, lors même que la distance de l'origine des axes au point que l'on considère dépasse 80,000 mètres. Ces erreurs, du reste, sont insensibles par rapport aux positions relatives des points d'une même localité.

Calcul d'un point par la station (article 74).

154. On suppose qu'étant au point O (fig. 23), on a observé les angles BOA=O, COA=O', sous lesquels on aperçoit les droites AB, AC, et qu'on veut se procurer la distance OA ainsi que l'angle OAS qu'elle fait avec *le méridien vrai* du point A.

Après avoir réduit à l'horizon, si cela est nécessaire, les angles observés, et fait la construction indiquée par la fig. 23, on déduira des coordonnées des points B, A, C les distances $AB = m$, $AC = m'$, et les *gisements apparents* BAY, CAY ; on opérera ensuite comme l'indique le tableau suivant :

$m = 4{,}000$ mètres. $m' = 7{,}000$ mètres.

$O = 69° 10' 40''$ B...... $79° 10' 10''$ S. O. de A.

$O' = 66\ 5\ 20$ C....... $69\ 0\ 10$ S. E. de A.

$O + O' = 135\ 16\ 0$ BAC $= 148° 10' 20''$

$\log m = 3{,}6020600$ $\log m' = 3{,}8450980$

$\log \sin O = 9{,}9706666$ $\log \sin O' = 9{,}9610295$

$\log b = 3{,}6315934$ $b = 4279^m50$ $\log b' = 3{,}8840685$ $b' = 7657^m17$

$b' - b = 3377^m67$.............. $b' + b = 11936^m67$

BAC $= 148° 10' 20''$

$180° - (O + O') = 44\ 44\ 0$

$\alpha = 103° 26' 20''$

$\frac{\alpha}{2} = 51° 43' 10''$ $\frac{1}{2}(\delta + \delta') = 90° - \frac{\alpha}{2} = 38° 16' 50''$

$\log (b' - b) = 3{,}5286172$ $\frac{1}{2}(\delta - \delta')$ .... $= 12\ 35\ 18{,}81$

compl. $\log (b' + b) = 5{,}9231163$ $\delta = 50° 52' 8''81$

$\log \cot \frac{\alpha}{2} = 9{,}8971879$ $\delta' = 25\ 41\ 31{,}19$

$\log \tang \left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right) = 9{,}3489214$ $\alpha = 103\ 26\ 20{,}00$

Vérification du calcul... $180°\ 0'\ 0''00$

$\log b = 3{,}6315934$ $\log b' = 3{,}8840685$

$\log \sin \delta = 9{,}8896973$ $\log \sin \delta' = 9{,}6370224$

$\log D = 3{,}5210907$.... $D = 3319^m64$.... $3{,}5210909$

Signal B.... $79° 10' 10''$ S.O. de A. Signal C. $69°\ 0' 10''$ S. E. de A.

$O = 69° 10' 40''$ $O' = 66° 5' 20'$

$\delta = 50\ 52\ 8{,}81$ $\delta' = 25\ 41\ 31{,}19$

$Z = 19\ 12\ 58{,}81$....... Signal O. $19° 12' 58''81$ S.O. de A

$\log D = 3{,}5210908$.................. $3{,}5210908$

$\log \sin Z = 9{,}5173752$ $\log \cos Z = 9{,}9751020$

$\log x = 3{,}0384660$ $\log y = 3{,}4961928$

$x = 1092^m61$ O. de A. $y = 3134^m68$ S. de A.

Gisement apparent... $Z = 19° 12' 58''81$

Convergence au point A. $\alpha' = 0\ 40\ 15{,}00$

Gisement vrai... Signal O.. $19° 53' 13''81$ S. O. du signal A, à 3319^m64.

En ajoutant actuellement aux coordonnées x et y celles du point A, on aura la position de O par rapport à l'origine des axes.

CALCULS DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU (CHAP. VII).

155. Dans les formules suivantes, Δ, Δ' représentent les distances zénithales observées; dH, dH' les hauteurs du sommet de chaque signal au-dessus de la lunette de l'instrument; K leur distance linéaire fournie par la triangulation; h désigne l'altitude connue de celui où l'on a mesuré la distance zénithale Δ; ρ' le rayon de courbure de la terre pour la latitude moyenne de la localité où l'on opère: les tables V en font connaître la valeur; enfin le module M a pour logarithme 9,6377843.

Si les hauteurs dH, dH' ne peuvent se mesurer directement, on emploiera, pour les déterminer, les méthodes données à l'article 83.

Les distances zénithales Δ, Δ' auront besoin d'être réduites au centre de la station lorsqu'elles auront été prises à une très-grande distance de ce point; mais presque jamais on ne se trouvera dans le cas d'avoir recours aux formules données à ce sujet à l'article 84.

1° *Calcul de la différence de niveau de deux points par des distances zénithales réciproques.*

156. $$\delta = \Delta + \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''}, \quad \delta' = \Delta' + \frac{dH' \sin \Delta'}{K \sin 1''};$$

$$\log dN = \log\left\{K \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\right\} + \frac{M}{\rho'} h \pm \frac{M}{2\rho'} K \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) + \frac{M}{12\rho'^2} K^2.$$

Le troisième terme de cette formule sera positif si h est

l'altitude du point où a été observée la plus petite distance zénithale, *qu'on représentera toujours par* Δ; il sera négatif dans le cas contraire.

Lorsqu'on voudra obtenir toute l'exactitude désirable, il faudra que les observations soient *simultanées*, parce qu'alors les résultats seront indépendants des effets de la réfraction. En opérant avec toutes les précautions possibles, et dans les circonstances atmosphériques les plus favorables, on pourra obtenir, à deux mètres près, la différence de niveau des deux points extrêmes d'une triangulation.

Dans tous les calculs qui suivent, on a adopté pour ϱ' la valeur de la grande normale à la latitude de 45°, ce qui est toujours permis. Les logarithmes des coefficients de h et des diverses puissances de K sont, dans cette hypothèse :

$$\log\frac{M}{\rho'}=2{,}8324481, \quad \log\frac{M}{2\rho'}=2{,}5314181, \quad \log\frac{M}{12\rho'^3}=4{,}9479307.$$

On fera bien néanmoins, dans la pratique, de les calculer en employant pour ϱ' la longueur qui convient à la latitude moyenne de la côte sur laquelle on opère; son logarithme se trouvera dans le table V.

Supposons qu'étant aux signaux M et N (fig. 22), dont nous avons calculé la distance page 202, on ait pris tous les éléments nécessaires à la détermination de leur différence de niveau ; on procédera à la recherche de cette quantité de la manière indiquée dans le tableau suivant :

$K = 57836^m05.$

Étant au signal M.	*Étant au signal* N.
Altitude du point M ou $h = 1000^m$	Altitude du point N ou $h' = 2820^m07$
$dH = 5^m$	$dH' = 2^m83$
Dist. zénithale de N ou $\Delta = 88°24'39''97$	Dist. zénithale de M ou $\Delta' = 92°\ 1'\ 1''57$

1° RÉDUCTION DES DISTANCES ZÉNITHALES AUX SOMMETS DES SIGNAUX.

CALCUL DE δ.	CALCUL DE δ'.
$\log dH = 0,69897$	$\log dH' = 0,45173$
$\log \sin \Delta = 9,99984$	$\log \sin \Delta' = 9,99972$
compl. $\log K = 5,23780$	compl. $\log K = 5,23780$
compl. $\log \sin 1'' = 5,31443$	compl. $\log \sin 1'' = 5,31443$
$\log \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''} = 1,25104.\ C^{on} = +17''82$	$\log \frac{dH' \sin \Delta'}{K \sin 1''} = 1,00368.\ C^{on} = +10''08$
$\Delta = 88°24'39''97$	$\Delta' = 92°1'\ 1''57$
$\delta = 88°24'57''79$	$\delta' = 92°1'11''65$

$$\delta' - \delta = 3°36'13''86$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = 1\ 48\ \ 6,93$$

2° CALCUL DE dN.

$$\log K = 4,7621984$$
$$\log \tan \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = 8,4977573$$
$$\log 1^{er} \text{ terme} = 3,2599557$$
$$2^e \text{ terme} = \quad 680$$
$$3^e \text{ terme} = \quad +\ 618$$
$$4^e \text{ terme} = \quad 30$$
$$\log dN = 3,2600885\ldots dN = 1820^m07$$

DEUXIÈME TERME.	TROISIÈME TERME.	QUATRIÈME TERME.
$\log \frac{M}{\rho'} = 2,8324481$	$\log \frac{M}{2\rho'} = 2,5314181$	$\log \frac{M}{12\rho'^2} = 4,94793$
$\log h = 3,$	$\log 1^{er}$ terme $= 3,2599557$	$\log K^2 = 9,52439$
$\log 2^e$ terme $= 5,8324481$	$\log 3^e$ terme $= 5,7913738$	$\log 4^e$ terme $= 4,47232$

157. Si aux deux stations M, N, les distances de l'instrument aux pieds des signaux ont été de $dT = 15$ mètres, $dT' = 20$ mètres, on aura (article 99) les valeurs suivantes pour les hauteurs absolues de leurs sommets et pour celles du sol où ils sont établis :

$$\text{Altitude du sommet} \begin{cases} \text{M} \ldots h + dT + dH \ldots\ldots = 1020^m{,}00 = H, \\ \text{N} \ldots h + dT' + dH' + dN = 2842^m{,}90 = H'. \end{cases}$$

$$\text{Altitude du sol de} \begin{cases} \text{M} \ldots H - (dT + dH) \ldots = 1000^m{,}00 = h, \\ \text{N} \ldots H' - (dT' + dH') \ldots = 2820^m{,}07 = h'. \end{cases}$$

Si l'on calculait dN avec l'altitude h' qui correspond au point N, où l'on a mesuré la plus grande distance zénithale Δ', il faudrait prendre négativement le terme $\frac{M}{2\rho'} K \tang \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$; on retomberait du reste sur la valeur qu'on vient de trouver.

2° Détermination de la différence de niveau de deux points par l'observation d'une seule distance zénithale.

158. $$\delta = \Delta + \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''},$$

$$\log dN = \log \left\{ \frac{K}{\tang\left(\delta - \frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} K\right)} \right\} + \frac{M}{\rho'} h \pm \frac{M}{2\rho'} \left\{ \frac{K}{\tang\left(\delta - \frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} K\right)} \right\} + \frac{M}{12\rho'^2} K^2.$$

Suivant que la distance zénithale observée Δ sera plus petite ou plus grande que 90°, l'altitude h du point où elle a été mesurée sera plus faible ou plus forte que celle du point dont on cherche la différence de niveau. Le troisième terme devra être pris positivement dans le premier cas, et négativement dans le second.

Lorsqu'on prend pour ρ' la valeur qui correspond à la

latitude de 45°, et qu'on suppose le coefficient n de la réfraction égal à 0,08, le facteur $\frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''}$ est égal à 0",0135625 et a pour logarithme 8,1323382.

Dans l'exemple suivant, on a adopté pour n la valeur 0,0798, qui convenait au moment des observations des distances zénithales Δ, Δ' du tableau précédent. On trouvera, dans le tableau de la page 217, le développement des calculs qui ont fourni cette valeur.

$K = 57836^m03.$

Étant au signal M.

Altitude du point M ou $h = 1000^m$,

$dH = 5^m$,

Distance zénithale de N ou $\Delta = 88°\ 24'\ 39''97$.

1° CALCUL DE L'ANGLE δ.

$\log dH = 0,69897$

$\log \sin \Delta = 9,99984$

$\text{compl.} \log K = 5,23780$

$\text{compl.} \log \sin 1'' = 5,31443$

$\log \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''} = 1,25104. \text{C}^{\text{es}} = +17''82$

$\Delta = 88°24'39''97$

$\delta = 88°24'57''79$

2° CALCUL DE L'ANGLE $\frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} K$.

$\log \frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} = 8,13252$

$\log K = 4,76220$

$\log \frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} K = 2,89472$

$\frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} K = 784''73$

$= 0°\ 13'\ 4''73$

$\delta - \frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} K = 88°\ 11'\ 53''06$

3° CALCUL DE dN.

$\log K = 4,7621984$

$\log \operatorname{tang}\left(\delta - \frac{1-2n}{2\rho' \sin 1''} K\right) = 1,5022427$

$\log 1^{\text{er}}$ terme $= 3,2599557$

2° terme $=$ 680

3° terme $=$ + 618

4° terme $=$ 30

$\log dN = 3,2600885 \ldots dN = 1820^m07$

DEUXIÈME TERME.	TROISIÈME TERME.	QUATRIÈME TERME.
$\log \frac{M}{\rho'} = 2,8324481$	$\log \frac{M}{2\rho'} = 2,5314181$	$\log \frac{M}{12\rho'^2} = 4,94793$
$\log h = 3,$	$\log 1^{\text{er}}$ terme $= 3,2599557$	$\log K^2 = 9,52439$
$\log 2^{\text{e}}$ terme $= 5,8324481$	$\log 3^{\text{e}}$ terme $= 5,7913738$	$\log 4^{\text{e}}$ terme $= 4,47232$

On serait arrivé au même résultat en partant de la distance zénithale réduite $\delta' = 92^\circ\ 1'\ 11''65$ prise au point N, et de l'altitude $h' = 2820^m,07$ de ce point; dans ce cas, le troisième terme de la formule doit être pris négativement.

Il est fort rare dans la pratique que l'on trouve une parfaite identité entre les différences de niveau obtenues par des distances zénithales réciproques et par une seule distance; car la valeur $n = 0,08$, que l'on adopte habituellement pour le coefficient de la réfraction, n'est presque jamais celle qui convient à l'instant où les observations ont été faites.

L'altitude des deux points M et N servira à déterminer celle du troisième sommet L du triangle NLM (fig. 22); on prendra pour sa valeur la moyenne de celles qu'auront fournies les différences de niveau des deux points N, L et des points L, M.

3°. *Mesure de l'altitude d'un lieu par la distance zénithale de l'horizon de la mer* (art. 80).

159.

$$\log \text{altitude} = \log \frac{\rho'}{2}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 + \log(\delta - 90^\circ)^2 + \frac{M}{4}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2(\delta - 90^\circ)^2.$$

On prendra, quand les circonstances locales le permettront, les distances zénithales de deux points de l'horizon éloignés l'un de l'autre, et on se servira dans les calculs de la moyenne des résultats entre ces deux observations. Si l'on voulait ne rien négliger, on noterait le jour et l'heure auxquels elles correspondent afin de connaître l'état de la marée pour cette époque et en déduire, par suite, la quantité qu'on devrait ajouter à l'altitude calculée, ou en retrancher pour obtenir

celle qui est relative au niveau moyen; enfin on soustrairait du résultat la hauteur de la lunette de l'instrument au-dessus du sol. On pourrait encore prendre les distances zénithales de l'horizon aux moments de la haute mer et de la basse mer; la moyenne des résultats étant introduite dans notre formule ferait connaître la hauteur du lieu au-dessus de la mer moyenne du jour où l'observation a été faite.

L'incertitude qui existe sur la valeur réelle du coefficient de la réfraction, au moment où l'on opère, pourra bien donner une erreur de dix mètres sur une grande hauteur.

Dans la formule ci-dessus $n=0,08$, $M=0,4342945$ et ρ' est le rayon de courbure à la latitude du lieu; les tables V feront connaître son logarithme.

On pourra toujours négliger le dernier terme, car il ne donnerait qu'une différence de $1^m 65$ sur une hauteur de 4,584 mètres.

Les logarithmes des termes constants sont :

$$\log \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 = 9,1425441,$$

$$\log \frac{M}{4}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 = 8,4792985.$$

Latitude du lieu $= 5° \; 0' \; 0''$
Distance zénithale $\delta = 91 \; 19 \; 11,97$
$\delta - 90° = 1 \; 19 \; 11,97 = 4751''97$

$\log \rho'$ (table V) $= 6,8046351$
$\log \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 = 9,1425441$
$\log (\delta - 90°)^2 = 7,3537474$
4e terme $= 681$

$\log$ Altitude $= 3,3009947$

Altitude $= 1999^m84$.

CALCUL DU QUATRIÈME TERME.

$\log \frac{M}{4}\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2 = 8,47930$
$\log (\delta - 90°)^2 = 7,35375$

$\log 4^e$ terme $= 5,83305$

La table IV, qui a été calculée dans l'hypothèse du rayon ρ' égal à la grande normale à 45° (table V), donnerait $2002^m,7$ pour l'altitude correspondante à la dépression apparente ci-dessus. La différence $2^m,9$ avec le résultat précédent montre qu'elle pourra servir pour tous les lieux du globe, car jamais on n'obtiendra, à trois mètres près, une grande hauteur par le procédé actuel.

CALCUL DE L'ÉTENDUE DE L'HORIZON VISUEL D'UN POINT EN FONCTION DE LA DISTANCE ZÉNITHALE DE L'HORIZON DE LA MER, OU EN FONCTION DE SON ALTITUDE (ARTICLES 91 ET 92).

160. Par ces mots : *étendue de l'horizon visuel*, nous désignons l'arc de grand cercle compris entre la verticale du

lieu où l'on observe et celle qui passe par le point de tangence du rayon visuel avec ce cercle.

$$\log \text{Étendue de l'horizon} = \log \varrho' + \log\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right) + \log(\delta - 90°).$$

$$\log \text{Étendue de l'horizon} = \tfrac{1}{2}\log 2\varrho' + \tfrac{1}{2}\log A - \frac{M}{2\rho'} A.$$

n désigne le coefficient de la réfraction qu'on prendra égal à 0,08, δ la distance zénithale observée, ϱ' le rayon de courbure pour le lieu de l'observation, A l'altitude de ce lieu, et M le module 0,4342945.

1° APPLICATION DE LA PREMIÈRE FORMULE.

$\delta = 91°\,19'\,11''97$ $\delta - 90° = 1°\,19'\,11''97 = 4751''97$

$$\begin{aligned}
\log \rho' &= 6,8046351\\
\log\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right) &= 4,7217871\\
\log(\delta - 90°) &= 3,6768737\\
\hline
\log \text{Étendue de l'horizon} &= 5,2032959\\
\text{Étendue de l'horizon} &= 159696^{m}7.
\end{aligned}$$

2° APPLICATION DE LA SECONDE FORMULE.

$$\text{Altitude } A = 1999^{m}84$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\log 2\rho' &= 3,5528325\\
\tfrac{1}{2}\log A &= 1,6504973\\
3^{e}\text{ terme} &= \quad -681\\
\hline
\log \text{Étendue de l'horizon} &= 5,2032617\\
\text{Étendue de l'horizon} &= 159684^{m}1.
\end{aligned}$$

CALCUL DU TROISIÈME TERME.

$$\begin{aligned}
\log M &= 9,63778\\
\text{compl.} \log 2\rho' &= 2,89433\\
\log A &= 3,30099\\
\hline
\log 3^{e}\text{ terme} &= 5,83310
\end{aligned}$$

CALCUL DU COEFFICIENT DE LA RÉFRACTION (ARTICLE 87).

161. Pour déterminer cette quantité, on prend à deux stations, dont la distance linéaire est bien connue, plusieurs séries des distances zénithales réciproques des sommets des signaux qui y sont placés; on substitue ensuite dans l'équation du tableau suivant les moyennes entre les résultats obtenus, *après toutefois avoir rapporté aux sommets des signaux les distances zénithales mesurées.* On choisira pour l'instant de ces observations le milieu de la journée et un beau temps.

Coefficient de la réfraction ou $n = \left\{ \dfrac{180° + \frac{K}{\rho' \sin 1''} - (\delta + \delta')}{2 \frac{K}{\rho' \sin 1''}} \right\}$.

$K = 57836^m03$.

Distances zénithales réduites .... $\begin{cases} \delta = 88°24'57''79 \\ \delta' = 92\ \ 1\ 11,65 \end{cases}$

$180° + \frac{K}{\rho' \sin 1''} = 180\ 31\ \ 7,61$

$180° + \frac{K}{\rho' \sin 1''} - (\delta + \delta') = 0°\ 4'58''17 = 298''17.$

log du numérateur = 2,4744639

compl. log $\frac{K}{\rho' \sin 1''}$ = 6,7287127 .... log $\frac{K}{\rho' \sin 1''}$ = 3,2712873

compl. log 2 = 9,6989700

log n = 8,9021466

Coefficient de la réfraction = 0,079827.

CALCUL DE L'ANGLE $\frac{K}{\rho' \sin 1''}$.

log K = 4,7621984

compl. log ρ' = 3,1946638

compl. log sin 1" = 5,3144251

log $\frac{K}{\rho' \sin 1''}$ = 3,2712873

$\frac{K}{\rho' \sin 1''} = 1807''61$

NOTA. Dans certaines circonstances extraordinaires de l'atmosphère, ce coefficient peut être négatif; mais l'observation peut seule en faire connaître la valeur et le signe. Delambre a trouvé qu'en France il variait de 0,06 à 0,08 en été, et de 0,08 à 0,10 en hiver.

DÉPRESSION VRAIE ET DÉPRESSION APPARENTE (ARTICLES 88 ET 89).

162.

$$\log \text{ Dépression vraie} \ldots\ldots = \log\left(\frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2}{\rho'}}\right) + \tfrac{1}{2}\log A - \frac{M}{2\rho'}A.$$

$$\log \text{ Dépression apparente} = \log\left(\frac{1-n}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2}{\rho'}}\right) + \tfrac{1}{2}\log A - \frac{M}{2\rho'}A.$$

Dans ces formules, n désigne le coefficient de la réfraction qu'on prend égal à 0,08, ρ' la normale à 45° de latitude, et A l'élévation de l'œil au-dessus du niveau de la mer.

Les quantités constantes ont pour logarithmes dans cette hypothèse :

$$\log\left(\frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2}{\rho'}}\right) = 2{,}0622720,$$

$$\log\left(\frac{1-n}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2}{\rho'}}\right) = 2{,}0260598,$$

$$\log \frac{M}{2\rho'} = 2{,}53142;$$

on pourra presque toujours négliger leur dernier terme. (La table III a été calculée avec la valeur de ρ' égal au rayon moyen de la terre).

Si l'on désirait avoir une valeur approchée du coefficient n pour l'instant où l'on fait les observations, on emploierait le procédé suivant, indiqué par M. l'ingénieur de Tessan. On mesurerait avec soin d'un point élevé de la mâture la dépression apparente de l'horizon, puis on substituerait la valeur d' qu'on aurait trouvée dans l'équation

$$n = 1 - \frac{d'}{\text{dépression vraie}} = 1 - \frac{d'}{\frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2A}{\rho'}}},$$

qui se déduit de la relation :

$$\text{Dépression vraie} = \frac{\text{Dépression apparente}}{1-n}, \text{ article 89.}$$

INCLINAISON DU RAYON VISUEL ABOUTISSANT AU PIED D'UNE CÔTE QUI BORDE L'HORIZON (ARTICLE 97).

163. $$\text{Inclinaison apparente} = \frac{e}{\rho' \sin C' \sin 1''} + \left(\frac{1-2n}{2}\right) C',$$

$$C' = \frac{K'}{\rho' \sin 1''}.$$

e représente l'élévation de l'œil au-dessus de la mer, K' la distance linéaire du point de station à celui de la côte qu'on observe, ρ' la normale à la latitude du lieu et n le coefficient de la réfraction.

CALCUL DE LA HAUTEUR D'UN LIEU PAR LE MOYEN DE SA DISTANCE ANGULAIRE À L'HORIZON DE LA MER ET DE SA DISTANCE LINÉAIRE AU POINT DE STATION (ARTICLES 93 ET 94).

164. $$\text{Altitude} = e + 2\rho' \frac{\sin\left(h+\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}}{\cos(h+C)}.$$

$$\text{Altitude approchée} = e + K \operatorname{tang}\left(h+\frac{C}{2}\right).$$

$$h = \left\{\begin{matrix}\text{Hauteur angulaire}\\ \text{observée}\end{matrix}\right\} - \left\{\left(\begin{matrix}\text{Dépression}\\ \text{apparente}\end{matrix}\right) + nC\right\},$$

$$C = \frac{K}{\rho' \sin 1''}, \qquad n = 0{,}08.$$

e désigne l'élévation de l'œil au-dessus de la mer, ρ' le rayon de courbure pour la latitude du lieu de l'observation, ou le rayon moyen de la terre (article 118), ce qui est bien suffisant; H la hauteur angulaire observée, K la distance linéaire

comprise entre le point de station et le point observé : on la prendra graphiquement sur la carte.

Si le sommet de la montagne qu'on a relevée ne s'y trouvait pas placé, on déterminerait sa position par la méthode indiquée (article 94).

La table III donnera la dépression apparente correspondante à la hauteur *e* de l'œil.

La seconde formule, qui est beaucoup plus simple, suffira dans tous les cas; car on verra, par l'exemple suivant, que pour une hauteur de 2,000 mètres elle ne donnerait qu'une différence de $0^m,29$ avec la première; or les éléments défectueux d'où l'on part ne permettent de déterminer ainsi une hauteur qu'à quelques mètres près.

$K = 35245^m57.$ $e = 4^m00.$ $H = 3^\circ\ 9'\ 57''15.$

1° CALCUL DE L'ANGLE C.

$\log K = 4{,}5471046$

$\text{compl.} \log \rho' = 3{,}1953649$

$\text{compl.} \log \sin 1'' = 5{,}3144251$

$\log C = 3{,}0568940$

$C = 1139''97 = 0^\circ 18' 59''97$

$h = 3\ \ 4\ 53{,}95$

$h + C = 3^\circ 23' 53''92$

2° CALCUL DE L'ANGLE h.

$\left\{ \begin{array}{c}\text{Dépression apparente} \\ \text{pour 4 mètres (Table III)}\end{array} \right\} = 0^\circ\ 3'32''00$

$nC = 0\ \ 1\ 31{,}20$

$\left\{ \begin{array}{c}\text{Dépression} \\ \text{apparente}\end{array} \right\} + nC = 0\ \ 5\ \ 3{,}20$

$H = 3\ \ 9\ 57{,}15$

$H - \left\{ \begin{pmatrix}\text{Dépression} \\ \text{apparente}\end{pmatrix} + nC \right\} \text{ ou } h = 3\ \ 4\ 53{,}95$

$\frac{C}{2} = 0\ \ 9\ 20{,}98$

$h + \frac{C}{2} = 3^\circ 14' 23''93$

CALCUL AVEC LA PREMIÈRE FORMULE.

$\log 2 = 0{,}3010300$

$\log \rho' = 6{,}8046351$

$\log \sin\left(h + \frac{C}{2}\right) = 8{,}7521883$

$\log \sin \frac{C}{2} = 7{,}4414339$

$\text{compl.} \log \cos (h + C) = 0{,}0007644$

$\log 2\rho' \frac{\sin\left(h + \frac{C}{2}\right) \sin \frac{C}{2}}{\cos (h + C)} = 3{,}3000517$

$= 1995^m50$

Hauteur de l'œil $e = \ \ 4^m00$

Altitude $= 1999^m50.$

CALCUL AVEC LA SECONDE FORMULE.

$\log K = 4{,}5471046$

$\log \tan\left(h + \frac{C}{2}\right) = 8{,}7528830$

$\log K \tan\left(h + \frac{C}{2}\right) = 3{,}2999876$

$= 1995^m21$

Hauteur de l'œil $e = \ \ 4^m00$

Altitude $= 1999^m21.$

Différence avec la première formule $= -0^m29.$

165. Si, au lieu de relever l'horizon de la mer, on avait pris l'angle compris entre le pied de la côte et le sommet dont on voulait avoir l'altitude, la valeur de h à substituer dans les formules précédentes eût été :

$$h = \left\{ \begin{array}{c} \text{Distance angulaire} \\ \text{du sommet au pied de la côte} \end{array} \right\} - \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{Inclinaison} \\ \text{apparente} \end{array} \right) + n\,C \right\}.$$

L'inclinaison apparente I se calculerait avec la formule de l'article 163; la distance K' dont elle dépend s'obtiendrait, si elle n'était pas connue directement, par le même moyen que la distance K (voir l'article 94).

166. On ne pourra compter sur l'exactitude des hauteurs angulaires ainsi observées, qu'autant qu'on sera à 5 ou 6,000 mètres de la côte; néanmoins il ne faudra jamais accorder beaucoup de confiance aux observations de cette nature.

CALCUL D'UNE ALTITUDE AU MOYEN D'OBSERVATIONS BAROMÉTRIQUES.
(ARTICLE 102).

167.

$$A = 18393^{m}\left\{\log\frac{H}{h} - 0{,}00008(T'-t')\right\}\left\{1 + 0{,}002(T+t)\right\}\left\{1 + 0{,}002837\cos 2\,l\right\}.$$

Si l'on veut obtenir des résultats satisfaisants, il faudra, comme le prescrit M. Biot dans son Traité d'astronomie pratique, choisir pour faire les observations un temps calme, l'heure de midi, et se placer à l'ombre. Le baromètre et le thermomètre, se trouvant alors préservés de toute cause accidentelle de chaleur, resteront longtemps stationnaires. On aura soin de comparer la marche des deux instruments avant de s'en servir, et de tenir compte dans les calculs des légères

différences qui pourront résulter de cette comparaison. On réunira cinq ou six séries d'observations correspondantes, faites à des jours différents et dans les circonstances que nous venons d'indiquer; chacune d'elles devra comprendre au moins dix observations de température et de hauteur de la colonne barométrique, faites de quart d'heure en quart d'heure. Enfin, avec la moyenne des résultats fournis par ces observations, on pourra, si l'on a pris toutes les précautions nécessaires, répondre de deux ou trois mètres sur les plus grandes hauteurs, en se servant de bons thermomètres et de baromètres dont les verniers permettent d'apprécier les dixièmes de millimètres.

Avant d'introduire dans la formule ci-dessus les valeurs de H et h ainsi obtenues, *il faudra les corriger, s'il y a lieu, de la dépression du mercure dans les tubes des baromètres, et de la variation du niveau dans leurs cuvettes* (*article* 105).

Hauteurs corrigées { H= 763^{mm}15	T′=25°3	T=25°3	l=21°
Hauteurs corrigées { h= 600^{mm}95	t'=21,3	t=21,3	log cos 2 l=9,87107
log H= 2,88261	T′−t'= 4°0	T+t=46°6	log (0,002837)=7,45286
log h=−2,77884		0,002	log(0,002837)cos2l=7,32393
0,00008(T′−t')= − 32	0,002 (T+t)=0,0932		0,002837 cos 2 l=0,002108
1er facteur= 0,10345	2e facteur=1,0932		3e facteur=1,002108

log 18393 = 4,2646526
log 1er facteur = 9,0147305
log 2e facteur = 0,0386996
−log 3e facteur = 0,0009144

log A = 3,3189971
Altitude ou A = 2084^{m}5

On trouvera, dans l'Annuaire publié par le bureau des longitudes, une table qui abrége beaucoup les calculs précédents.

CALCULS DES LATITUDES, LONGITUDES ET AZIMUTS GÉODÉSIQUES DES POINTS D'UN RÉSEAU TRIGONOMÉTRIQUE (CHAP. VIII).

1°. *En fonction des côtés des triangles qui lient ces points entre eux.*

168.
$$u'' = \frac{K}{\rho' \sin 1''} = \frac{K(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}{a \sin 1''},$$

$$H' = H - (1+e^2\cos^2 H)u''\cos Z - (1+e^2\cos^2 H)(u''\sin Z)^2 \tang H \times \frac{\sin 1''}{2},$$

$$P' = P + \frac{u''\sin Z}{\cos H'},$$

$$Z' = 180° + Z - \frac{u''\sin Z}{\cos H'} \sin \tfrac{1}{2}(H+H').$$

2°. *En fonction de leurs coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires qui passent par un point connu géographiquement.*

169.
$$H' = H \pm \frac{y}{\rho \sin 1''} - \frac{\sin 1''}{2}\left(\frac{x}{\rho' \sin 1''}\right)^2 \tang\left(H \pm \frac{y}{\rho \sin 1''}\right),$$

$$P' = P \pm \left(\frac{x}{\rho' \sin 1''}\right) \times \frac{1}{\cos H'},$$

$$Z' = 270° \pm \frac{x}{\rho' \sin 1''} \tang H'.$$

Les premières formules ne s'emploient que pour les points de la triangulation principale.

H, P représentent la latitude et la longitude connues de l'un des sommets du triangle;

H' P' celles du sommet dont on veut avoir la position géographique.

Z est l'azimut de celui-ci sur l'horizon de l'autre, compté du sud vers l'ouest et de 0° à 360°. Il faudra bien faire attention à la grandeur de cet angle, d'où dépendent les signes de son sinus et de son cosinus.

Z' désigne l'azimut inconnu du premier point sur l'horizon du second et compté comme le précédent.

K exprime en mètres la distance de ces deux points, et u'' cette même distance convertie en secondes de degré.

a désigne le rayon de l'équateur;

e le rapport de l'excentricité du sphéroïde à son demi-grand axe;

ρ et ρ' les rayons de courbure du méridien et de la perpendiculaire à l'origine des axes.

Les logarithmes des facteurs $\frac{1}{\rho \sin 1''}$, $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$, $1+e^2\cos^2 H$, s'obtiendront au moyen de parties proportionnelles par les tables V, qui ont été calculées dans l'hypothèse de $a = 6377116$ mètres et de $e^2 = 0{,}0065466$, c'est-à-dire d'un aplatissement égal à $\frac{1}{305}$. (Voir la note placée à la fin de la table V.)

Si on voulait les valeurs de ces quantités pour un autre aplatissement, on aurait recours aux formules suivantes dans lesquelles le module $M = 0{,}4342945$:

$$\log \rho = \log a + \log(1-e^2) + 3\,M\frac{e^2\sin^2 H}{2}\left(1+\frac{e^2\sin^2 H}{2}\right),$$

$$\log \rho' = \ldots\ldots\ldots \log a + M\frac{e^2\sin^2 H}{2}\left(1+\frac{e^2\sin^2 H}{2}\right),$$

$$\log(1+e^2\cos^2 H) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots M e^2\cos^2 H\left(1-\frac{e^2\cos^2 H}{2}\right).$$

170. Si, par exemple, $\log a = 6{,}8045840$, $\log e^2 =$

7,8108467, $\log(1-e^2) = 9{,}9971814$, on procédera comme il suit au calcul de ces quantités correspondantes à la latitude $H = 49°\ 1'\ 30'',00$. On s'en servira ensuite pour déterminer la position géographique du sommet M du triangle que nous avons résolu page 202. Nous supposerons que par des calculs précédents on a obtenu, pour les latitudes et longitudes des extrémités de la base LN et pour leurs azimuts réciproques, les valeurs ci-après :

L { 49° 1′ 30″00 Nord. / 5° 42′ 30″87 Ouest.　　N { 49° 22′ 33″28 Nord. / 5° 46′ 47″07 Ouest.

Azimut de N sur l'horizon de L = 172° 27′ 25″34.
Azimut de L sur l'horizon de N = 352° 24′ 11″38.

CALCULS DES LOGARITHMES DE ρ ET DE $\frac{1}{\rho \sin 1''}$.

compl. log 2 = 9,6989700
log e^2 = 7,8108467
2 log sin H = 9,7558890
log $\frac{e^2 \sin^2 H}{2}$ = 7,2657057 .... log $\frac{e^2 \sin^2 H}{2}$ = 7,26570
log M = 9,6377843 — log 3^e terme = 7,38061
log M $\frac{e^2 \sin^2 H}{2}$ = 6,9034900 = 0,0008007 — log 4^e terme = 4,64631
log 3 = 0,4771213 — log a = 6,8045840
log 3^e terme = 7,3806113 — log $(1-e^2)$ = 9,9971814
3M $\frac{e^2 \sin^2 H}{2}$, ou 3^e terme = 0,0024022
3M $\left(\frac{e^2 \sin^2 H}{2}\right)^2$, ou 4^e terme = 0,0000044
log ρ = 6,8041720
log sin 1$''$ = 4,6855749
log facteur $\frac{1}{\rho \sin 1''}$ = 8,5102531 .... log ρ sin 1$''$ = 1,4897469

CALCULS DES LOGARITHMES DE ρ' ET DE $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$.

log M $\frac{e^2 \sin^2 H}{2}$ = 6,90349
log $\frac{e^2 \sin^2 H}{2}$ = 7,26570
log 3^e terme = 4,16919
log a = 6,8045840
M $\frac{e^2 \sin^2 H}{2}$, ou 2^e terme = 0,0008007
M $\left(\frac{e^2 \sin^2 H}{2}\right)^2$, ou 3^e terme = 0,0000015
log ρ' = 6,8053862
log sin 1$''$ = 4,6855749
log facteur $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$ = 8,5090389 .... log ρ' sin 1$''$ = 1,4909611

CALCUL DU LOGARITHME DE $(1+e^2 \cos^2 H)$.

log e^2 = 7,8108467
2 log cos H = 9,6334496 — compl. log 2 = 9,69897
log $e^2 \cos^2 H$ = 7,4442963 .... log $e^2 \cos^2 H$ = 7,44430
log M = 9,6377843 — log 1er terme = 7,08208
log 1er terme = 7,0820806 — log 2e terme = 4,22535
M $e^2 \cos^2 H$, ou 1er terme = 0,0012080
M $\frac{(e^2 \cos^2 H)^2}{2}$, ou 2e terme = − 0,0000017
log $(1+e^2 \cos^2 H)$ = 0,0012063

Calcul de la position géographique du point M (*fig.* 22) *par les premières formules.*

H=49°1'50"00 N. . . . . P=5°42'50"87 O.

2° terme de H'= +3 0,69 — $\frac{u'' \sin Z}{\cos H'}$= -34 51,24

3° terme de H'= — 5,15 — Longitude P'=5° 7'59"63

Latitude H'=49°4'25"54

$\frac{1}{2}$ (H+H')=49 2 37,77

Azimut de N sur L=172°27'25"54
Angle sphérique L= 89 58 41,41

Azimut de M sur L, ou Z=262°26' 8"75
3° terme de Z', ou $\frac{u'' \sin Z}{\cos H'} \sin \frac{1}{2}$ (H+H')= + 26 4,35

Azimut de L sur M, ou Z'= 82°52'11"10
Angle sphérique M= 42 53 11,41

Azimut de N sur M=125°45'22"51

L M = K = 42592m18
log K=4,6272857
log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$=8,5090389
log u''=3,1363246
log sin Z=9,9962036
log u'' sin Z=3,1325282
log cos H'=9,8162990
log $\frac{u'' \sin Z}{\cos H'}$=3,3162292 = 2071"24
log sin $\frac{1}{2}$ (H+H')=9,8781049
log 3° terme de Z'=3,1943341 = 1564"35

DEUXIÈME TERME DE H'.
log(1+e²cos²H)=0,0012063
log u''=3,1363246
log cos Z=9,1194118
log 2° terme=2,2569427
2° terme=180"69

TROISIÈME TERME DE H'.
2 log u'' sin Z= 6,26505
. . . .= 0,00121
log $\frac{\sin 1''}{2}$= 4,38454
log tang H= 0,06122
log 3° terme= 0,71202
3° terme= — 5"15

On vérifiera ces valeurs de H', P' et Z' qu'on vient d'obtenir en recommençant la même opération avec le côté N M, la position géographique du point N, l'angle sphérique N et l'azimut de L sur l'horizon de N. Les calculs devront s'ac-

corder toujours à deux ou trois centièmes de seconde; on adoptera la moyenne des résultats pour la latitude et la longitude du point M, et pour ses azimuts sur les horizons des points N et L. Avec ces données on passera au triangle suivant NOM, dont on déterminera de la même manière la position du sommet O.

171. Nous allons actuellement chercher la position géographique du même point M au moyen de ses distances à la méridienne et à la perpendiculaire de A obtenues page 202; nous supposerons qu'on s'est procuré, soit par les formules précédentes, soit par les tables V, les valeurs des facteurs constants $\frac{1}{\rho \sin 1''}$, $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$, correspondants à la latitude de l'origine A des axes. (Si les côtés de la chaîne de triangles avaient été calculés en toises, il faudrait, pour approprier à ce cas les logarithmes des facteurs donnés par la table V, en retrancher le nombre constant 9,7101801. On devrait l'ajouter aux logarithmes de ρ et de ρ' si l'on voulait avoir les logarithmes de ces rayons de courbure exprimés en toises.)

Position géographique de l'origine des axes $\begin{cases} 48^\circ\ 41'\ 48''72 \text{ Nord.} \\ 6\ \ \ 7\ \ 48{,}55 \text{ Ouest.} \end{cases}$

$x = 72814^m07$ Est. $y = 42380^m70$ Nord.

DEUXIÈME TERME DE P'.

$\log \frac{1}{\rho' \sin 1''} = 8{,}5090469$

$\log x = 4{,}8622153$

$\log \frac{x}{\rho' \sin 1''} = 3{,}3712622 = 2351''05$

$\log \cos H' = 9{,}8162989$

$\log \frac{x}{\rho' \cos H' \sin 1''} = 3{,}5549633$

$\frac{x}{\rho' \cos H' \sin 1''} = 3588''91 = 59'48''91$

$P = 6^\circ\ 7'48''55$ Ouest.

$\frac{x}{\rho' \cos H' \sin 1''} = 0\ 59\ 48{,}91$ Est.

Longitude $P' = 5^\circ\ 7'59''64$ Ouest.

DEUXIÈME TERME DE H'.

$\log \frac{1}{\rho \sin 1''} = 8{,}5102775$

$\log y = 4{,}6271682$

$\log \frac{y}{\rho \sin 1''} = 3{,}1374455 = 1372''29$

TROISIÈME DE TERME DE H'.

$\log \frac{\sin 1''}{2} = 4{,}38454$

$2 \log \frac{x}{\rho' \sin 1''} = 6{,}74252$

$\log \operatorname{tang}\left(H + \frac{y}{\rho \sin 1''}\right) = 0{,}06203$

$\log 3^e$ terme $= 1{,}18909$

3^e terme $= 15''45$

$H = 48^\circ 41'48''72$ Nord.

$\frac{y}{\rho \sin 1''} = +\ 22'52''29$ Nord.

$H + \frac{y}{\rho \sin 1''} = 49^\circ\ 4'41''01$

$\frac{\sin 1''}{2}\left(\frac{x}{\rho' \sin 1''}\right)^2 \operatorname{tang}\left(H + \frac{y}{\rho \sin 1''}\right) = -\ 15{,}45$

Latitude $H' = 49^\circ\ 4'25''56$ Nord.

Lorsqu'on aura obtenu les valeurs numériques des quantités $\log \frac{x}{\rho' \sin 1''}$, $\log \frac{y}{\rho \sin 1''}$, il sera bon de les vérifier avant d'aller plus loin. A cet effet, on calculera, une fois pour toutes, deux petites tables qui renfermeront avec sept décimales les valeurs en secondes de $\frac{x}{\rho' \sin 1''}$, $\frac{y}{\rho \sin 1''}$, depuis un jusqu'à dix mètres. On s'en servira pour convertir en arcs les distances données x et y. Les nombres qu'elles auront fournis devront s'accorder, à deux ou trois centièmes près, avec ceux qui correspondent aux logarithmes de $\frac{x}{\rho' \sin 1'}$, $\frac{y}{\rho \sin 1'}$

Le tableau suivant contient une table qui convient au cas actuel.

x.	$\frac{x}{\rho' \sin 1''}$	y.	$\frac{y}{\rho \sin 1''}$
1 mètre.	0"0322884	1 mètre.	0"0323800
2......	0,0645768	2......	0,0647601
3......	0,0968652	3......	0,0971401
4......	0,1291536	4......	0,1295201
5......	0,1614420	5......	0,1619002
6......	0,1937304	6......	0,1942803
7......	0,2260188	7......	0,2266603
8......	0,2583072	8......	0,2590404
9......	0,2905956	9......	0,2914205
10......	0,3228843	10......	0,3238004

APPLICATION AUX DONNÉES DE L'EXEMPLE PRÉCÉDENT.

$x = 72814^m07$.		$y = 42380^m70$.	
70000..............	2260"19	40000..............	1295"20
2000..............	64,58	2000..............	64,76
800..............	25,83	300..............	9,71
10..............	0,32	80..............	2,59
4..............	0,13	0..............	0,00
0,07..............	0,00	0,7..............	0,02
72814^{m}07........ =	2351"05	42380^{m}70........ =	1372"28

Si l'on calculait la position de ce même point avec ses coordonnées $x = 69077^m,33$ ouest, $y = 44446^m,59$ nord, relatives à l'origine A' pour laquelle $H = 48° 40' 40'', 28$ N, $P = 4° 11' 15'', 78$ O, on trouverait avec les résultats précédents une différence de $+ 0'',02$ sur la latitude et de $- 0'',89$ sur la longitude; elle provient en grande partie

de la somme des petites erreurs que l'on a commises par la manière dont on a déterminé les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de chacun des douze points par lesquels on a passé pour arriver en M (article 71).

CALCULS DES LATITUDES ET LONGITUDES DES INTERSECTIONS DES DROITES MENÉES PARALLÈLEMENT À LA MÉRIDIENNE ET À LA PERPENDICULAIRE SUR LES PLANS DE CONSTRUCTION (ARTICLE 135).

172. Les formules précédentes sont celles dont on se sert pour obtenir les positions géographiques des sommets des carreaux tracés sur les divers plans de construction (articles 125 et 135); à cet effet, on fait successivement dans ces équations :

$$x=0^{m}\begin{cases} y=0^{m} \\ y=6000^{m}\text{N. ou S.} \\ y=12000^{m} \\ y=18000^{m} \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$x=6000^{m}\text{E. ou O.}\begin{cases} y=0^{m} \\ y=6000^{m} \\ y=12000^{m} \\ y=18000^{m} \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$x=12000^{m}\begin{cases} y=0^{m} \\ y=6000^{m} \\ y=12000^{m} \\ y=18000^{m} \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On prend pour H et P les valeurs qui conviennent au

point où l'on a placé l'origine des axes. Ces calculs s'effectuent assez promptement, à cause de certains termes qui, étant communs à plusieurs points, n'ont besoin d'être calculés qu'une seule fois.

CALCUL DE LA DISTANCE DE DEUX POINTS CONNUS PAR LEUR LATITUDE ET LEUR LONGITUDE, OU MESURE D'UNE BASE PAR DES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES (ARTICLE 119).

173.

$$\frac{\beta}{2} = \frac{e^2 (H - H') \cos^2 \frac{1}{2} (H + H')}{2}, \qquad \varrho' = \frac{a}{\left\{1 - e^2 \sin^2 \frac{1}{2} (H + H')\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$h = H - \frac{\beta}{2}, \qquad x'' = (P - P') \cos h',$$

$$h' = H' + \frac{\beta}{2}, \qquad y'' = (h - h') - \frac{\sin 1''}{2} x''^2 \operatorname{tang} h,$$

$$\operatorname{tang} Z = \frac{x''}{y''}, \qquad x = x'' \varrho' \sin 1'',$$

$$u'' = \frac{x''}{\sin Z} = \frac{y''}{\cos Z}, \qquad y = y'' \varrho' \sin 1'',$$

$$K = u'' \varrho' \sin 1''.$$

H, P, H', P' représentent les coordonnées géographiques observées astronomiquement aux deux points dont on veut avoir la distance; u'' désigne cette distance exprimée en secondes, K sa valeur en unités linéaires; x'' est le nombre de secondes contenues dans l'arc abaissé perpendiculairement du second point sur le méridien du premier, y'' celui qui existe dans la portion de ce méridien comprise entre ce premier point et le pied de cette perpendiculaire, enfin x et y sont les expressions linéaires de ces quantités.

Il faudra bien faire attention au signe du facteur (H — H')

d'où dépend celui du terme $\frac{\beta}{2}$, et à celui de $h - h'$ dans la valeur de y'', afin de savoir si le petit terme $\left(-\frac{\sin 1''}{2} x''^2 \tang h\right)$ doit s'ajouter à lui ou s'en retrancher. L'azimut Z se compte du sud vers l'ouest, et de 0° à 360°.

Nous allons prendre pour exemple les deux points M et N (fig. 22) dont nous avons déjà obtenu la distance, par la résolution du triangle LMN (page 202), et les positions géographiques des sommets N et M par les calculs précédents.

$H = 49^\circ\ 4'25''54$ N.	$P = 5^\circ\ 7'59''63$ O.
$H' = 49\ 22\ 33{,}28$ N.	$P' = 5\ 46\ 47{,}07$ O.
$H - H' = -18\ \ 7{,}74$	$P - P' = 38'47''44 = 2327''44$
$H + H' = 98\ 26\ 58{,}82$	$H = 49\ \ 4\ 25{,}54$
$\frac{H-H'}{2} = -\ 9\ \ 3{,}87 = -543''87$	$\frac{\varepsilon}{2} = -1{,}50$
$\frac{H+H'}{2} = 49\ 15\ 29{,}41$	$h = H - \frac{\varepsilon}{2} = 49^\circ\ 4'27''04$
	$H' = 49\ 22\ 33{,}28$
	$\frac{\varepsilon}{2} = -1{,}50$
	$h' = H' + \frac{\varepsilon}{2} = 49^\circ 22'31''78$

CALCUL DE $\frac{\varepsilon}{2}$.	CALCUL DE x''.
$\log e^2 = 7{,}81085$	$\log (P-P') = 3{,}3668785$
$\log \frac{H-H'}{2} = 2{,}73549$	$\log \cos h' = 9{,}8136470$
$2 \log \cos\left(\frac{H+H'}{2}\right) = 9{,}62994$	$\log x'' = 3{,}1805255$. $x'' = 1515''39$
$\log \frac{\varepsilon}{2} = 0{,}17628$. $\frac{\varepsilon}{2} = -1''50$	

CALCUL DU DEUXIÈME TERME DE y''.	CALCUL DE y''.
$\log \frac{\sin 1''}{2} = 4{,}38454$	
$2 \log x'' = 6{,}36105$	
$\log \operatorname{tang} h = 0{,}06197$	$h - h' = -18'4''74 = -1084''74$
$\log 2^e$ terme $= 0{,}80756$	2^e terme de $y'' = -6{,}42$
	$y'' = 1091''16$

CALCUL DE L'AZIMUT Z.

$\log x'' = 3{,}1805255$

$\log y'' = 3{,}0378887$

$\log \frac{x''}{y''} = 0{,}1426368$ $\qquad Z = 125^\circ 45' 20''90$

CALCUL DE u'' ET DE K.

$\log x'' = 3{,}1805255$	$\log y'' = 3{,}0378887$
$\log \sin Z = 9{,}9092964$	$\log \cos Z = 9{,}7666596$
$\log u'' = 3{,}2712291$	$\log u'' = 3{,}2712291$
$\log \rho' = 6{,}8053910$	
$\log \sin 1'' = 4{,}6855749$	
$\log K = 4{,}7621950$	Distance cherchée, ou $K = 57835^m57$

CALCUL DE x.	CALCUL DE y.
$\log x'' = 3{,}1805255$	$\log y'' = 3{,}0378887$
$\log \rho' \sin 1'' = 1{,}4909659$	$\log \rho' \sin 1'' = 1{,}4909659$
$\log x = 4{,}6714914$	$\log y = 4{,}5288546$
$x = 46934^m41$ Ouest.	$y = 33795^m16$ Nord.

CALCUL DE LA DISTANCE DE DEUX POINTS, CONNAISSANT LA POSITION GÉOGRAPHIQUE DE L'UN, L'AZIMUT DE L'AUTRE SUR SON HORIZON, ET LA LATITUDE DE CELUI-CI (ARTICLE 122).

174.

$$\frac{\beta}{2}=\frac{e^2(H-H')\cos^2\frac{1}{2}(H+H')}{2}, \quad \rho'=\frac{a}{\left\{1-e^2\sin^2\frac{1}{2}(H+H')\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$h=H-\frac{\beta}{2}, \qquad \tang\varphi=\frac{\tang h}{\cos Z},$$

$$h'=H'+\frac{\beta}{2}, \qquad \sin(\varphi-u)=\frac{\sin h'}{\sin h}\sin\varphi,$$

$$K=u''\rho'\sin 1''.$$

L'azimut Z se compte toujours du sud vers l'ouest, et de 0° à 360°; sa grandeur fera connaître le signe de l'arc φ et par suite celui de $\varphi-u$.

Pour faire une application de ces formules, prenons pour H, P, Z et H' les valeurs précédentes et celles de h, h' qu'on en a déduites :

$H = 49°\ 4'25''54$ Nord
$H' = 49\ 22\ 33,28$ Nord
$h = 49\ \ 4\ 27,04$
$h' = 49\ 22\ 31,78$

$P = 5°\ 7'59''63$ Ouest
$Z = 125\ 45\ 20''90$

CALCUL DE L'ANGLE φ.

$\log \tang h = 0,0619727$
$\log \cos Z = 9,7666596$
$\log \tang \varphi = 0,2953131$
$\varphi = -(63°7'55''46)$

CALCUL DE L'ANGLE $(\varphi-u)$.

$\log \sin \varphi = 9,9503895$
$\log \sin h' = 9,8802377$
compl. $\log \sin h = 0,1217320$
$\log \sin(\varphi-u) = 9,9523592$
$\varphi-u = -(63°39'2''88)$
$u = 0°31'7''42 = 1867''42$

$\log u'' = 3,2712421$
$\log \rho' \sin 1'' = 1,4909659$
$\log K = 4,7622080$ $\quad K = 57837^m29$

CALCUL DE LA DISTANCE DE DEUX POINTS, ÉTANT DONNÉS LES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES DE L'UN, L'AZIMUT DE L'AUTRE SUR SON HORIZON ET LEUR DIFFÉRENCE DE LONGITUDES (ARTICLE 123).

175.

$\operatorname{tang}\varphi = \sin H \operatorname{tang} Z,$ $\qquad \operatorname{tang} H'' = \frac{\operatorname{tang} H \sin(\varphi - p)}{\sin \varphi}$

$\beta = e^2(H - H'')\cos^2\frac{1}{2}(H + H''),$ $\qquad H' = H'' - \beta,$

$h = H - \frac{\beta}{2},$ $\qquad h' = H' + \frac{\beta}{2},$

$u'' = \frac{p\cos h'}{\sin Z},$ $\qquad K = u''\varrho' \sin 1''.$

L'azimut Z est toujours compté du sud vers l'ouest; sa grandeur fera connaître le signe de l'arc φ, et par suite indiquera si le petit arc p doit s'ajouter à celui-ci ou s'en retrancher.

Les données de l'exemple suivant sont tirées des calculs précédents.

$H = 49^\circ\ 4'25''54$ Nord. $\qquad P = 5^\circ\ 7'59''63$ Ouest.
$H'' = 49\ 22\ 30{,}21$ $\qquad p = P' - P = 0\ 38\ 47{,}44 = 2327''44$

$H - H'' = -18\ \ 4{,}67 = -1084''67$ $\qquad Z = 125\ 45\ 20{,}90$
$H + H'' = 98\ 26\ 55{,}75 \ldots\ldots\ldots \dfrac{H+H''}{2} = 49\ 13\ 27{,}87$

$H = 49\ \ 4\ 25{,}54$
$H' = 49\ 22\ 33{,}20$

$H - H' = -18\ \ 7{,}66 \ldots\ldots\ldots \dfrac{H-H'}{2} = -\ 9'\ 3''83 = -543''83$
$H + H' = 98\ 26\ 58{,}74 \ldots\ldots\ldots \dfrac{H+H'}{2} = 49\ 13\ 29{,}37$

CALCUL DE L'ANGLE φ.

$\log \sin H = 9{,}8782652$
$\log \tang Z = 0{,}1426368$
$\log \tang \varphi = 0{,}0209020$
$\varphi = -(46^\circ 22' 41'' 71)$
$p = \ \ 0\ 38\ 47{,}44$
$\varphi - p = -(47^\circ\ 1'29''15)$

CALCUL DE L'ANGLE H″.

$\log \tang H = 0{,}0619663$
$\log \sin (\varphi - p) = 9{,}8643024$
$\text{compl.} \log \sin \varphi = 0{,}1403154$
$\log \tang H'' = 0{,}0665841$
$H'' = 49^\circ 22' 30'' 21$

CALCUL DE β.

$\log e^2 = 7{,}81085$
$\log (H - H') = 3{,}03531$
$2 \log \cos \frac{1}{2}(H + H') = 9{,}62994$ $\qquad H'' = 49^\circ 22' 30'' 21$
$\log \beta = 0{,}47610$ $\qquad \beta = -\ \ 2{,}99$

$H = 49^\circ\ 4'25''54$ $\qquad H' = H'' - \beta = 49\ 22\ 33{,}20$
$\dfrac{\beta}{2} = -\ 1{,}49 \ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{\beta}{2} = -\ 1{,}49$

$h = H - \dfrac{\beta}{2} = 49^\circ\ 4'27''03$ $\qquad h' = H' + \dfrac{\beta}{2} = 49^\circ 22' 31'' 71$

CALCUL DE u'' ET DE K.

$\log p = 3{,}3668785$
$\log \cos h' = 9{,}8136471$
$\text{compl.} \log \sin Z = 0{,}0907036$
$\log u'' = 3{,}2712292$
$\log \rho' \sin 1'' = 1{,}4909659$
$\log K = 4{,}7621951$ $\qquad K = 57835^{m}58$

176. Si l'on compare ces divers résultats à celui qu'a fourni la résolution du triangle LMN, on trouve que le premier et le troisième n'en diffèrent que de $0^m,46$, et le second de $1^m,26$. Ces différences doivent être considérées comme nulles, parce que les erreurs inhérentes aux observations astronomiques desquelles on part sont de beaucoup supérieures à celles que nous signalons ici.

Les coordonnées x et y de N, par rapport au *méridien vrai* de M (page 235) diffèrent de celles qu'a données le triangle LMN (page 202), relativement au *méridien apparent de ce même point*, de $-$ $440^m,33$, $+$ $619^m,28$. Si l'on corrige le gisement apparent 54° 59′ 49″,11 de la convergence des méridiens de A et M qui s'élève à $-$ 45′ 3″,88, puis qu'on calcule les coordonnées x et y en partant du *gisement vrai* 54° 14′ 45″,23 et de la valeur du côté $l = 57836,03$, on retrouvera, à un mètre près, celles qui appartiennent au premier des cas que nous venons de traiter.

EXPRESSION DE LA CONVERGENCE DES MÉRIDIENS DE DEUX POINTS (ARTICLE 111).

177. $\text{Convergence} = (P - P') \sin \frac{1}{2}(H + H')$.

La connaissance de cet angle est nécessaire pour l'orientation des plans (article 127).

H = 49′ 4′25″55	P = 5° 7′59″63
H′ = 48 41 48,72	P′ = 6 7 48,65
H + H′ = 97 46 14′27	P − P′ = 0°59′48″92 = −3588″92
$\frac{H+H'}{2}$ = 48 53 7,13	

log (P—P′) = 3,5549638
log sin ½ (H+H′) = 9,8770224
log convergence = 3,4519862
Convergence = — 2703″88 = — (0°45′3″88)

FORMULE POUR CALCULER LES LATITUDES CROISSANTES.

178.

$$h = \frac{10800'}{\pi M} \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{H}{2}\right) - \frac{10800'}{\pi}\left(e^2 \sin H + \frac{e^4 \sin^3 H}{3}\right).$$

Veut-on savoir, par exemple, combien vaut de minutes de l'équateur, sur une carte réduite, un arc de méridien compris entre ce cercle et le parallèle de 40°? on opérera, comme il suit, en observant que le module $M = 0{,}4342945$, et en prenant pour e^2 la valeur $e^2 = 0{,}0065466$, qui convient à l'aplatissement $\frac{1}{305}$.

$H = 40^\circ$, $\log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{H}{2}\right) = \log \operatorname{tang} 65^\circ = 0{,}3313275.$

CALCUL DU PREMIER TERME.	CALCUL DU DEUXIÈME TERME.
$\log \frac{10800'}{\pi} = 3{,}5362739$	$\log \frac{10800'}{\pi} = 3{,}53627$
compl. $\log M = 0{,}3622157$	$\log e^2 = 7{,}81602$
$\log (0{,}3313275) = 9{,}5202576$	$\log \sin H = 9{,}80806$
$\log$ 1er terme $= 3{,}4187472 = 2622'69$	$\log$ 2e terme $= 1{,}16035 = 14'46$

CALCUL DU TROISIÈME TERME.	CALCUL DE h.
compl. $\log 3 = 9{,}52288$	1er terme $= 2622'69$
$\log \frac{10800'}{\pi} = 3{,}53627$	2e terme $= -14;46$
$2 \log e^2 = 5{,}63204$	3e terme $= -0{,}01$
$3 \log \sin H = 9{,}42418$	$h = 2608'22$
$\log$ 3e terme $= 8{,}11537 = 0'01$	

LONGUEUR PAR LAQUELLE ON DOIT REPRÉSENTER, SUR UNE CARTE RÉDUITE, UNE MINUTE DE LATITUDE, EN FONCTION DE CELLE DE L'ÉQUATEUR EXPRIMÉE EN UNITÉS LINÉAIRES.

179. $\left\{\begin{array}{c}\text{Longueur d'une minute de latitude}\\ \text{sur une carte réduite}\end{array}\right\} = \frac{(n'-n)}{20}\,m.$

Cette formule sert à tracer les parallèles d'une carte (article 134).

m désigne la grandeur linéaire adoptée pour la minute de l'équateur; *n*, *n'* représentent les nombres de minutes de ce cercle contenues dans des arcs de méridien de H° + 10', et H° — 10'; les tables VI de latitudes croissantes les font connaître immédiatement.

A la latitude de H = 49°, par exemple, on a :

$$\text{pour}\left\{\begin{array}{l}H^\circ+10'=49^\circ10'\ldots\ldots n'=3381'15\\ H^\circ-10'=48^\circ50'\ldots\ldots n=3350'74\end{array}\right.$$

$$\text{d'où}\left\{\begin{array}{c}\text{20 minutes}\\ \text{de latitudes croissantes à } 49^\circ\end{array}\right\}=n'-n=\ 30'41 \text{ de l'équateur;}$$

par conséquent, si l'on prend pour *m* la valeur $m = 0^m{,}027$, on aura :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Une minute de latitude croissante}\\ \text{sous le parallèle de } 49^\circ\end{array}\right\}=\frac{30{,}41\times0^m027}{20}=0^m041.$$

VALEUR, À L'ÉCHELLE DE LA CARTE, DU CÔTÉ DE CHAQUE CARRÉ DANS LES PLANS PARTICULIERS DE CONSTRUCTION.

180.

$$\frac{cm}{1855}\times\left\{\begin{array}{c}\text{Le nombre de minutes de l'équateur}\\ \text{que contient une minute du méridien à la latitude H du plan}\end{array}\right\};$$

ou bien

$$\frac{cm}{1855}\times\frac{(n'-n)}{20}.$$

c est la longueur réelle en mètres d'un côté du carré, m le nombre de millimètres par lequel on représente sur la carte la minute de l'équateur; enfin n et n' les nombres de minutes de ce cercle, contenues dans les arcs de méridien de $H^{\circ} + 10'$, $H^{\circ} - 10'$.

On a besoin de connaître cet élément lorsqu'on veut construire des lignes de sonde à l'échelle de la carte (article 126).

Si l'on fait $c = 2000$ mètres, $m = 0^{m},027$, on aura, par ce qui précède, pour le nombre qui doit exprimer 2000 mètres à l'échelle de la carte sous la latitude $H = 49^{\circ}$:

$$\frac{2000 \times 0^{m}027^{\circ}}{1855} \times \frac{30,41}{20} = 0^{m}044.$$

TABLES

DESTINÉES

A ABRÉGER LES OPÉRATIONS NUMÉRIQUES

RELATIVES A DIVERS CALCULS GÉODÉSIQUES.

TABLE I.

POUR LES CALCULS D'UNE BASE AU MOYEN DE LA VITESSE DU SON (ART. 40).

TABLE POUR L'HYGROMÈTRE A CONDENSATION.

TEMPÉRATURE DU POINT DE ROSÉE en degrés centigrades.	VALEURS CORRESPONDANTES de f en millimètres.	TEMPÉRATURE DU POINT DE ROSÉE en degrés centigrades.	VALEURS CORRESPONDANTES de f en millimètres.
— 20°	1,3	15°	13,0
— 10	2,6	20	17,3
— 5	3,7	25	23,0
0	5,0	30	30,6
+ 5	7,0	35	40,4
10	9,5	40	53,0

TABLES POUR L'HYGROMÈTRE A CHEVEU.

DEGRÉS de L'HYGROMÈTRE.	VALEURS CORRESPONDANTES de y.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE CENTIGRADE.	VALEURS CORRESPONDANTES de F.
10	0,05	—20°	1,3
20	0,12	—10	2,6
30	0,20	— 5	3,7
40	0,26	0	5,0
50	0,35	+ 5	7,0
60	0,44	10	9,5
70	0,56	15	13,0
80	0,70	20	17,3
90	0,83	25	23,0
100	1,00	30	30,6
		35	40,4
		40	53,0

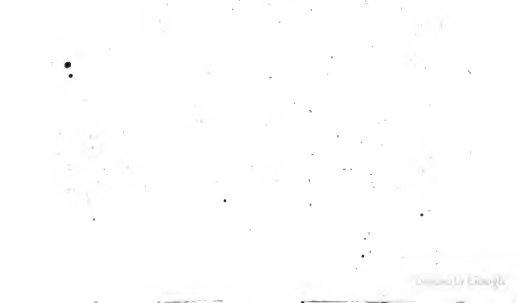


TABLE II.

POUR CORRIGER LA HAUTEUR DE LA COLONNE BAROMÉTRIQUE (ART. 105).

DIAMÈTRE intérieur du tube.	DÉPRESSION.	DIFFÉRENCE.	DISTANCE de la pointe à la paroi de la cuvette.	DIFFÉRENCE.	DIAMÈTRE intérieur du tube.	DÉPRESSION.	DIFFÉRENCE.	DISTANCE de la pointe à la paroi de la cuvette.	DIFFÉRENCE.
mm	mm		mm		mm	mm		mm	
2,00	4,58		0,00		11,00	0,33		2,47	
		0,99		....			0,04		0,31
50	3,59		0,00		50	0,29		2,78	
		0,69		....			0,03		0,35
3,00	2,90		0,00		12,00	0,26		3,13	
		0,49		....			0,03		0,39
50	2,41		0,00		50	0,23		3,52	
		0,36		....			0,03		0,44
4,00	2,05		0,00		13,00	0,20		3,96	
		0,30		....			0,02		0,49
50	1,75		0,00		50	0,18		4,45	
		0,24		....			0,02		0,55
5,00	1,51		0,00		14,00	0,16		5,00	
		0,20		....			0,02		0,64
50	1,31		0,00		50	0,14		5,64	
		0,17		....			0,02		0,71
6,00	1,14		0,00		15,00	0,12		6,35	
		0,15		....			0,01		0,81
50	0,99		0,00		50	0,11		7,16	
		0,11		....			0,01		0,93
7,00	0,88		1,04		16,00	0,10		8,09	
		0,11		0,11			0,01		1,07
50	0,77		1,15		50	0,09		9,16	
		0,09		0,12			0,01		1,23
8,00	0,68		1,27		17,00	0,08		10,39	
		0,08		0,14			0,01		1,40
50	0,60		1,41		50	0,07		11,79	
		0,07		0,16			0,01		1,58
9,00	0,53		1,57		18,00	0,06		13,37	
		0,06		0,18			0,01		1,78
50	0,47		1,75		50	0,05		15,15	
		0,05		0, 1			0,00		2,05
10,00	0,42		1,96		19,00	0,05		17,20	
		0,05		0,24			0,01		2,40
50	0,37		2,20		50	0,04		19,60	
		0,04		0,27			0,00		2,83
11,00	0,33		2,47		20,00	0,04		22,43	

TABLE III.

POUR CALCULER LA DÉPRESSION DE L'HORIZON ET SA DISTANCE (ART. 88—91).

$\left\{\begin{array}{c}\text{Dépression}\\ \text{vraie}\end{array}\right\} = \frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2e}{R}}$. $\left\{\begin{array}{c}\text{Distance}\\ \text{de l'horizon}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Dépression}\\ \text{vraie}\end{array}\right\} \times R \sin 1''$. $\left\{\begin{array}{c}\text{Dépression}\\ \text{apparente}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Dépression}\\ \text{vraie}\end{array}\right\} \times 0{,}92$.

$R = 6366698$ mètres.

Hauteur de l'œil en mètres	Dépression vraie	Différence	Distance de l'horizon en mètres	Distance en milles	Dépression apparente	Différence	Hauteur de l'œil en mètres	Dépression vraie	Différence	Distance de l'horizon en mètres	Distance en milles	Dépression apparente	Différence
m 0,5	1′ 22″		2551	1,37	1′ 15″		m 9	5′ 47″		10711	5,78	5′ 19″	
		34″				32″			9″				8
1	1 56		3581	1,93	1 47		9,5	5 56		10988	5,93	5 27	
		26				24			10				10
1,5	2 22		4383	2,37	2 11		10	6 6		11297	6,10	5 37	
		22				20			17				15
2	2 44		5062	2,73	2 31		11	6 23		11822	6,38	5 52	
		19				17			17				16
2,5	3 3		5649	3,05	2 48		12	6 40		12347	6,06	6 8	
		17				16			17				16
3	3 20		6173	3,33	3 4		13	6 57		12871	6,95	6 24	
		18				16			16				14
3,5	3 38		0729	3,63	3 20		14	7 13		13365	7,21	6 38	
		13				12			15				14
4	3 51		7130	3,85	3 32		15	7 28		13828	7,46	6 52	
		14				13			14				13
4,5	4 5		7562	4,08	3 45		16	7 42		14260	7,70	7 5	
		14				13			15				14
5	4 19		7994	4,32	3 58		17	7 57		14723	7,95	7 19	
		12				11			14				13
5,5	4 31		8365	4,52	4 9		18	8 11		15156	8,18	7 32	
		12				11			13				12
6	4 43		8735	4,71	4 20		19	8 24		15557	8,40	7 44	
		12				11			13				12
6,5	4 55		9106	4,92	4 31		20	8 37		15958	8,61	7 56	
		11				10			13				12
7	5 6		9445	5,10	4 41		21	8 50		16359	8,83	8 8	
		11				11			12				11
7,5	5 17		9785	5,28	4 52		22	9 2		16730	9,03	8 19	
		10				9			12				11
8	5 27		10093	5,45	5 1		23	9 14		17100	9,23	8 30	
		10				9			12				11
8,5	5 37		10402	5,62	5 10		24	9 26		17470	9,43	8 41	
		10				9			12				11
9	5 47		10711	5,78	5 19		25	9 38		17841	9,63	8 52	

Suite de la TABLE III.

Hauteur de l'œil en mètres	Dépression vraie.	Différence.	Distance de l'horizon en mètres.	Distance en milles.	Dépression apparente.	Différence.	Hauteur de l'œil en mètres	Dépression vraie.	Différence.	Distance de l'horizon en mètres.	Distance en milles.	Dépression apparente.	Différence.
25	9'38"	12"	17841	9,63	8'52"	11"	44	12'47"	9"	23675	12,78	11'46"	8"
26	9 50	11	18211	9,83	9 3	10	45	12 56	8	23932	12,93	11 54	7
27	10 1	11	18551	10,01	9 13	10	46	13 4	8	24199	13,06	12 1	8
28	10 12	11	18890	10,20	9 23	10	47	13 12	9	24446	13,23	12 9	8
29	10 23	10	19230	10,38	9 33	9	48	13 21	8	24724	13,35	12 17	7
30	10 33	11	19558	10,55	9 42	10	49	13 29	8	24971	13,48	12 24	8
31	10 44	10	19878	10,73	9 52	10	50	13 37	8	25218	13,61	12 32	7
32	10 54	10	20187	10,90	10 2	9	51	13 45	8	25465	13,73	12 39	7
33	11 4	10	20496	11,06	10 11	9	52	13 53	9	25712	13,88	12 46	8
34	11 14	10	20804	11,23	10 20	9	53	14 2	8	25989	14,03	12 54	8
35	11 24	10	21112	11,40	10 29	9	54	14 10	8	26237	14.16	13 2	7
36	11 34	9	21421	11,56	10 38	9	55	14 18	7	26483	14,30	13 9	7
37	11 43	10	21699	11,71	10 47	9	56	14 25	7	26700	14,41	13 16	6
38	11 53	9	22008	11,88	10 56	8	57	14 32	8	26915	14,53	13 22	7
39	12 2	9	22286	12,03	11 4	8	58	14 40	8	27162	14,66	13 29	8
40	12 11	9	22565	12,18	11 12	9	59	14 48	7	27409	14,80	13 37	6
41	12 20	9	22841	12,33	11 21	8	60	14 55	8	27625	14,91	13 43	8
42	12 29	9	23119	12,48	11 29	8	61	15 3	7	27873	15,03	13 51	6
43	12 38	9	23397	12,63	11 37	9	62	15 10	7	28088	15,16	13 57	7
44	12 47		23675	12,78	11 46		63	15 17		28305	15,28	14 4	

Suite de la TABLE III.

Hauteur de l'œil en mètres	Dépression vraie.	Différence.	Distance de l'horizon en mètres.	Distance en milles.	Dépression apparente.	Différence.	Hauteur de l'œil en mètres	Dépression vraie.	Différence.	Distance de l'horizon en mètres.	Distance en milles.	Dépression apparente.	Différence.
63	13′17″	7″	28305	15,28	14′ 4″	6″	81	17′20″	7″	32101	17,33	15′57″	6″
64	13 24	8	28520	15,40	14 10	7	82	17 27	6	32317	17,45	16 3	6
65	13 32	7	28768	15,53	14 17	7	83	17 33	7	32503	17,55	16 9	6
66	13 39	7	28983	15,65	14 24	6	84	17 40	6	32719	17,66	16 15	6
67	13 46	7	29199	15,76	14 30	7	85	17 46	6	32904	17,76	16 21	5
68	13 53	7	29416	15,88	14 37	6	86	17 52	6	33089	17,86	16 26	6
69	16 0	7	29632	16,00	14 43	7	87	17 58	6	33273	17,96	16 32	5
70	16 7	7	29848	16,11	14 50	6	88	18 4	6	33460	18,06	16 37	6
71	16 14	7	30064	16,23	14 56	6	89	18 10	7	33644	18,16	16 43	6
72	16 21	7	30280	16,35	15 2	7	90	18 17	6	33860	18,28	16 49	6
73	16 28	6	30496	16,46	15 9	5	91	18 23	6	34045	18,38	16 55	5
74	16 34	7	30681	16,56	15 14	7	92	18 29	6	34231	18,48	17 0	6
75	16 41	6	30897	16,68	15 21	5	93	18 35	6	34416	18,58	17 6	5
76	16 47	7	31083	16,78	15 26	7	94	18 41	6	34601	18,68	17 11	6
77	16 54	7	31299	16,90	15 33	6	95	18 47	6	34786	18,78	17 17	5
78	17 1	7	31515	17,01	15 39	7	96	18 53	6	34972	18,88	17 22	6
79	17 8	6	31731	17,13	15 46	5	97	18 59	6	35157	18,98	17 28	5
80	17 14	6	31916	17,23	15 51	6	98	19 5	6	35342	19,08	17 33	6
81	17 20		32101	17,33	15 57		99	19 11	5	35527	19,18	17 39	4
							100	19 16		35682	19,26	17 43	

TABLE IV.

POUR CALCULER L'ALTITUDE D'UN LIEU AU MOYEN DE LA DÉPRESSION APPARENTE DE L'HORIZON (ART. 80).

$$\text{Altitude} = \tfrac{1}{2}\rho'\left(\frac{\sin 1''}{1-n}\right)^2(\delta-90°)^2.$$

NOTA. La table précédente fait connaître les altitudes inférieures à 100 mètres.

δ—90°	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE	δ—90°	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE	δ—90°	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE	δ—90°	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE
	m			m			m			m	
0°17'30"	97,8	2,8	0°21'45"	151,0	3,5	0°26' 0"	215,8	4,2	0°30'15"	292,2	4,8
17 45	100,6	2,8	22 0	154,5	3,6	26 15	220,0	4,2	30 30	297,0	4,9
18 0	103,4	2,9	22 15	158,1	3,5	26 30	224,2	4,3	30 45	301,9	4,9
18 15	106,3	3,0	22 30	161,6	3,6	26 45	228,5	4,3	31 0	306,8	5,0
18 30	109,3	2,9	22 45	165,2	3,7	27 0	232,8	4,3	31 15	311,8	5,0
18 45	112,2	3,1	23 0	168,9	3,7	27 15	237,1	4,4	31 30	316,8	5,1
19 0	115,3	3,0	23 15	172,6	3,7	27 30	241,5	4,4	31 45	321,9	5,0
19 15	118,3	3,1	23 30	176,3	3,8	27 45	245,9	4,4	32 0	326,9	5,2
19 30	121,4	3,1	23 45	180,1	3,8	28 0	250,3	4,5	32 15	332,1	5,1
19 45	124,5	3,2	24 0	183,9	3,9	28 15	254,8	4,5	32 30	337,2	5,2
20 0	127,7	3,2	24 15	187,8	3,8	28 30	259,3	4,6	32 45	342,4	5,3
20 15	130,9	3,3	24 30	191,6	4,0	28 45	263,9	4,6	33 0	347,7	5,3
20 30	134,2	3,3	24 45	195,6	3,9	29 0	268,5	4,7	33 15	353,0	5,3
20 45	137,5	3,3	25 0	199,5	4,1	29 15	273,2	4,7	33 30	358,3	5,4
21 0	140,8	3,4	25 15	203,6	4,0	29 30	277,9	4,7	33 45	363,7	5,4
21 15	144,2	3,4	25 30	207,6	4,1	29 45	282,6	4,8	34 0	369,1	5,4
21 30	147,6	3,4	25 45	211,7	4,1	30 0	287,4	4,8	34 15	374,5	5,5
21 45	151,0		26 0	215,8		30 15	292,2		34 30	380,0	

Suite de la TABLE IV.

δ—90°	Altitude.	Différence	δ—90°	Altitude.	Différence	δ—90°	Altitude.	Différence	δ—90°	Altitude.	Différence
	m			m			m			m	
0°34'30"	380,0		0°39'30"	498,2		0°44'30"	632,3		0°49'30"	782,3	
		5,6			6,3			7,1			7,9
34 45	385,6		39 45	504,5		44 45	639,4		49 45	790,2	
		5,5			6,4			7,1			8,0
35 0	391.1		40 0	510,9		45 0	646,5		50 0	798,2	
		5,6			6,4			7,2			8,0
35 15	396,7		40 15	517,3		45 15	653,7		50 15	806,2	
		5,7			6,4			7,3			8,0
35 30	402,4		40 30	523,7		45 30	661,0		50 30	814,2	
		5,7			6,5			7,3			8,1
35 45	408,1		40 45	530,2		45 45	668,3		50 45	822,3	
		5,7			6,5			7,3			8,2
36 0	413,8		41 0	536,7		46 0	675,6		51 0	830,5	
		5,8			6,6			7,4			8,1
36 15	419,6		41 15	543,3		46 15	683,0		51 15	838,6	
		5,8			6;6			7,4			8,2
36 30	425,4		41 30	549,9		46 30	690,4		51 30	846,8	
		5,8			6,6			7,5			8,3
36 45	431,2		41 45	556,5		46 45	697,9		51 45	855,1	
		5,9			6,7			7,4			8,2
37 0	437,1		42 0	563,2		47 0	705,3		52 0	863,3	
		5,9			6,7			7,4			8,4
37 15	443,0		42 15	569,9		47 15	712,7		52 15	871,7	
		6,0			6,8			7,7			8,3
37 30	449,0		42 30	576,7		47 30	720,4		52 30	880,0	
		6,0			6,8			7,6			8,4
37 45	455,0		42 45	583,5		47 45	728,0		52 45	888,4	
		6,0			6,9			7,6			8,5
38 0	461,0		43 0	590,4		48 0	735,6		53 0	896,9	
		6,1			6,8			7,7			8,5
38 15	467,1		43 15	597,2		48 15	743,3		53 15	905,4	
		6,2			7,0			7,7			8,5
38 30	473,3		43 30	604,2		48 30	751,0		53 30	913,9	
		6,1			6,9			7,8			8,5
38 45	479,4		43 45	611,1		48 45	758,8		53 45	922,4	
		6,2			7,0			7,8			8,6
39 0	485,6		44 0	618,1		49 0	766,6		54 0	931,0	
		6,3			7,1			7,8			8,7
39 15	491,9		44 15	625,2		49 15	774,4		54 15	939,7	
		6,3			7,1			7,9			8,7
39 30	498,2		44 30	632,3		49 30	782,3		54 30	948,4	

SUITE DE LA TABLE IV.

$\delta - 90°$	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE	$\delta - 90°$	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE	$\delta - 90°$	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE	$\delta - 90°$	ALTITUDE.	DIFFÉRENCE
	m			m			m			m	
0°54'30"	948,4		0°59'30"	1130,4		1° 4'30"	1328,4		1° 9'30"	1542,2	
		8,7			9,5			10,2			11,2
54 45	957,1		59 45	1139,9		4 45	1338,6		9 45	1553,4	
		8,7			9,5			10,4			11,2
55 0	965,8		1° 0 0	1149,4		5 0	1349,0		10 0	1564,6	
		8,8			9,6			10,4			11,1
55 15	974,6		0 15	1159,0		5 15	1359,4		10 15	1575,7	
		8,9			9,7			10,4			11,2
55 30	983,5		0 30	1168,7		5 30	1369,8		10 30	1586,9	
		8,9			9,6			10,5			11,3
55 45	992,4		0 45	1178,3		5 45	1380,3		10 45	1598,2	
		8,9			9,8			10,5			11,3
56 0	1001,3		1 0	1188,1		6 0	1390,8		11 0	1609,5	
		8,9			9,7			10,5			11,4
56 15	1010,2		1 15	1197,8		6 15	1401,3		11 15	1620,9	
		9,0			9,8			10,7			11,4
56 30	1019,2		1 30	1207,6		6 30	1412,0		11 30	1632,3	
		9,1			9,8			10,6			11,4
56 45	1028,3		1 45	1217,4		6 45	1422,6		11 45	1643,7	
		9,1			9,9			10,7			11,5
57 0	1037,4		2 0	1227,3		7 0	1433,3		12 0	1655,2	
		9,1			9,9			10,7			11,5
57 15	1046,5		2 15	1237,2		7 15	1444,0		12 15	1666,7	
		9,1			10,0			10,8			11,6
57 30	1055,6		2 30	1247,2		7 30	1454,8		12 30	1678,3	
		9,2			10,0			10,7			11,6
57 45	1064,8		2 45	1257,2		7 45	1465,5		12 45	1689,9	
		9,3			10,0			10,9			11,5
58 0	1074,1		3 0	1267,2		8 0	1476,4		13 0	1701,4	
		9,3			10,2			10,9			11,8
58 15	1083,4		3 15	1277,4		8 15	1487,3		13 15	1713,2	
		9,3			10,0			10,9			11,7
58 30	1092,7		3 30	1287,4		8 30	1498,2		13 30	1724,9	
		9,3			10,2			10,9			11,7
58 45	1102,0		3 45	1297,6		8 45	1509,1		13 45	1736,6	
		9,3			10,2			11,0			11,8
59 0	1111,3		4 0	1307,8		9 0	1520,1		14 0	1748,4	
		9,4			10,2			11,1			11,8
59 15	1120,9		4 15	1318,0		9 15	1531,2		14 15	1760,2	
		9,5			10,4			11,0			11,9
59 30	1130,4		4 30	1328,4		9 30	1542,2		14 30	1772,1	

Suite de la TABLE IV.

δ—90°	Altitude.	Différence	δ—90°	Altitude.	Différence	δ—90°	Altitude.	Différence	δ—90°	Altitude.	Différence
1°14′30″	m 1772,1		1°18′30	m 1967,5		1°22′30″	m 2173,1		1°26′30″	m 2389,0	
14 45	1784,1	12,0	18 45	1980,1	12,6	22 45	2186,4	13,3	26 45	2402,8	13,8
15 0	1796,0	11,9	19 0	1992,7	12,6	23 0	2199,6	13,2	27 0	2416,7	13,9
15 15	1808,0	12,0	19 15	2005,3	12,6	23 15	2212,8	13,2	27 15	2430,6	13,9
15 30	1820,1	12,1	19 30	2018,0	12,7	23 30	2226,1	13,3	27 30	2444,6	14,0
15 45	1832,1	12,0	19 45	2030,7	12,7	23 45	2239,5	13,4	27 45	2458,6	14,0
16 0	1844,2	12,1	20 0	2043,4	12,7	24 0	2252,9	13,4	28 0	2472,5	13,9
16 15	1856,3	12,1	20 15	2056,2	12,8	24 15	2266,3	13,4	28 15	2486,6	14,1
16 30	1868,6	12,3	20 30	2069,0	12,8	24 30	2279,8	13,5	28 30	2500,8	14,2
16 45	1880,8	12,2	20 45	2082,0	13,0	24 45	2293,3	13,5	28 45	2514,9	14,1
17 0	1893,0	12,2	21 0	2094,8	12,8	25 0	2306,9	13,6	29 0	2529,0	14,1
17 15	1905,4	12,4	21 15	2107,8	13,0	25 15	2320,5	13,6	29 15	2543,3	14,3
17 30	1917,7	12,3	21 30	2120,8	13,0	25 30	2334,1	13,6	29 30	2557,5	14,2
17 45	1930,1	12,4	21 45	2133,8	13,0	25 45	2347,7	13,6	29 45	2571,9	14,4
18 0	1942,5	12,4	22 0	2146,9	13,1	26 0	2361,4	13,7	30 0	2586,3	14,4
18 15	1955,0	12,5	22 15	2160,0	13,1	26 15	2375,2	13,8	30 15	2600,7	14,4
18 30	1967,5	12,5	22 30	2173,1	13,1	26 30	2389,0	13,8	30 30	2615,0	14,3

TABLE V.

POUR LE CALCUL DES LATITUDES, LONGITUDES ET AZIMUTS GÉODÉSIQUES (CH. VIII).

Aplatissement $= \frac{1}{302} = \alpha$. Rayon de l'équateur $= 6377116$ mètres $= a$.

LATITUDE.	RAYON DE COURBURE de la PERPENDICULAIRE. $\rho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$. log ρ'.	DIFFÉR. commune	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	RAYON DE COURBURE du MÉRIDIEN. $\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$. log ρ.	DIFFÉR. commune	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	log $(1+e^2\cos^2 H)$	DIFFÉRENCE.
0° 0'	6,8046243		8,5098008	6,8017718		8,5126533	0,0028338	
		1			3			2
30	6244		8007	7721		6530	8336	
		3			10			6
1 0	6247		8004	7731		6520	8330	
		6			16			11
30	6253		7998	7747		6504	8319	
		7			23			15
2 0	6260		7991	7770		6481	8304	
		10			29			19
30	6270		7981	7799		6452	8285	
		12			36			26
3 0	6282		7969	7835		6416	8260	
		14			42			27
30	6296		7955	7877		6374	8233	
		16			48			32
4 0	6312		7939	7925		6326	8201	
		18			55			36
30	6330		7921	7980		6271	8165	
		21			62			41
5 0	6351		7900	8042		6209	8124	
		22			68			45
30	6373		7878	8110		6141	8079	
		25			74			49
6 0	6398		7853	8184		6067	8030	
		27			80			53
30	6425		7826	8264		5987	7977	
		29			87			58
7 0	6454		7797	8351		5000	7919	
		31			93			62
30	6485		7766	8444		5807	7857	

Suite de la TABLE V.

LATITUDE.	RAYON DE COURBURE de la PERPENDICULAIRE. log ρ'.	DIFFÉR. communes	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	RAYON DE COURBURE du MÉRIDIEN. log ρ.	DIFFÉR. communes	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	log$(1+e^2\cos^2 H)$	DIFFÉRENCE.
7°30'	6,8046485		8,5097766	6,8018444		8,5125807	0,0027857	
		33			100			66
8 0	6518		7733	8544		5707	7791	
		35			105			70
30	6553		7698	8649		5602	7721	
		37			112			74
9 0	6590		7661	8761		5490	7647	
		40			118			78
30	6630		7621	8879		5372	7569	
		42			125			82
10 0	6672		7579	9004		5247	7487	
		43			130			87
30	6715		7536	9134		5117	7400	
		46			137			90
11 0	6761		7490	9271		4980	7310	
		47			142			94
30	6808		7443	9413		4838	7216	
		49			149			99
12 0	6857		7394	9562		4689	7117	
		52			154			102
30	6909		7342	9716		4535	7015	
		53			160			106
13 0	6962		7289	9876		4375	6909	
		56			166			110
30	7018		7233	6,8020042		4209	6799	
		57			172			114
14 0	7075		7176	0214		4037	6685	
		59			178			118
30	7134		7117	0392		3859	6567	
		61			183			121
15 0	7195		7056	0575		3676	6446	
		63			189			125
30	7258		6993	0764		3487	6321	
		65			195			129
16 0	7323		6928	0959		3292	6192	
		67			200			133
30	7390		6861	1159		3092	6059	
		68			205			136
17 0	7458		6793	1364		2887	5923	

Suite de la TABLE V.

LATITUDE.	RAYON DE COURBURE de la PERPENDICULAIRE. log ρ'.	DIFFÉR. commune	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	RAYON DE COURBURE du MÉRIDIEN. log ρ.	DIFFÉR. commune	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	log $(1+e^2\cos^2 H)$	DIFFÉRENCE.
17° 0'	6,8047458		8,5096793	6,8021364		8,5122887	0,0025923	
		70			211			139
30	7529		6723	1575		2676	5784	
		73			216			143
18 0	7601		6650	1791		2460	5641	
		73			222			147
30	7674		6577	2013		2238	5494	
		76			227			150
19 0	7750		6501	2240		2011	5344	
		77			231			154
30	7827		6424	2471		1780	5190	
		79			237			157
20 0	7906		6345	2708		1543	5033	
		81			242			160
30	7987		6264	2950		1301	4873	
		82			247			164
21 0	8069		6182	3197		1054	4709	
		84			252			166
30	8153		6098	3449		0802	4543	
		85			256			170
22 0	8238		6013	3705		0546	4373	
		88			261			173
30	8326		5925	3966		0285	4200	
		88			266			176
23 0	8414		5837	4232		0019	4024	
		90			270			179
30	8504		5747	4502		8,5119749	3845	
		92			275			182
24 0	8596		5655	4777		9474	3663	
		93			279			185
30	8689		5562	5056		9195	3478	
		94			283			187
25 0	8783		5468	5339		8912	3291	
		96			288			191
30	8879		5372	5627		8624	3100	
		97			291			193
26 0	8976		5275	5918		8333	2907	
		99			296			196
30	9075		5176	6214		8037	2711	

Suite de la TABLE V.

Latitude.	Rayon de courbure de la perpendiculaire. log ρ'.	Différ. communes	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	Rayon de courbure du méridien. log ρ.	Différ. communes	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	$\log(1+e^2\cos^2 H)$	Différence.
26°30′	6,8049073		8,5095176	6,8026214		8,5118057	0,0022711	
		100			299			198
27 0	9175		5076	6513		7758	2513	
		101			304			201
30	9276		4975	6817		7454	2312	
		102			307			203
28 0	9378		4873	7124		7127	2109	
		104			311			206
30	9482		4769	7435		6816	1903	
		105			314			208
29 0	9587		4664	7749		6502	1695	
		105			318			211
30	9692		4559	8067		6184	1484	
		108			321			213
30 0	9800		4451	8388		5863	1271	
		108			325			215
30	9908		4343	8713		5538	1056	
		109			327			217
31 0	6,8050017		4234	9040		5211	0839	
		110			331			219
30	0127		4124	9371		4880	0620	
		111			334			221
32 0	0238		4013	9705		4546	0399	
		112			336			223
30	0350		3901	6,8030041		4210	0176	
		114			339			224
33 0	0464		3787	0380		3871	0,0019952	
		114			342			227
30	0578		3673	0722		3529	9725	
		114			345			228
34 0	0692		3559	1067		3184	9497	
		116			347			230
30	0808		3443	1414		2837	9267	
		116			349			231
35 0	0924		3327	1763		2488	9036	
		118			352			233
30	1042		3209	2115		2136	8803	
		118			354			234
36 0	1160		3091	2469		1782	8569	

SUITE DE LA TABLE V.

LATITUDES.	RAYON DE COURBURE de la PERPENDICULAIRE. log ρ'.	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	RAYON DE COURBURE du MÉRIDIEN. log ρ.	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	log $(1 + e^2 \cos^2 H)$	DIFFÉRENCE.
36° 0'	6,8051160	118	8,5095091	6,8052409	355	8,5111782	0,0018569	236
30	1278	119	2973	2824	358	1427	8333	237
37 0	1397	120	2854	3182	359	1069	8096	238
30	1517	121	2734	3541	362	0710	7858	239
38 0	1638	121	2613	3903	362	0348	7619	240
30	1759	121	2492	4265	365	8,5109986	7379	242
39 0	1880	122	2371	4630	365	9621	7137	242
30	2002	122	2249	4995	367	9256	6895	243
40 0	2124	123	2127	5362	368	8889	6652	243
30	2247	123	2004	5730	369	8521	6409	245
41 0	2370	123	1881	6099	370	8152	6164	245
30	2493	124	1758	6469	371	7782	5919	246
42 0	2617	124	1634	6840	372	7411	5673	246
30	2741	124	1510	7212	372	7039	5427	246
43 0	2865	124	1386	7584	373	6667	5181	247
30	2989	124	1262	7957	373	6294	4934	247
44 0	3113	125	1138	8330	373	5921	4687	247
30	3238	124	1013	8703	373	5548	4440	248
45 0	3362	125	0889	9076	374	5175	4192	247
30	4875		0764	9450		4801	3945	

Suite de la TABLE V.

Latitude.	Rayon de courbure de la perpendiculaire. log ρ'	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	Rayon de courbure du méridien. log ρ	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	$\log(1+e^2\cos^2 H)$	Différence.
45°30'	6,8053487		8,5090764	6,8039450		8,5104801	0,0013945	
		124			373			247
46 0	3611		0640	9823		4428	3698	
		124			373			247
30	3735		0516	6,8040196		4055	3451	
		125			373			247
47 0	3860		0391	0569		3682	3204	
		124			372			247
30	3984		0267	0941		3310	2957	
		124			372			246
48 0	4108		0143	1313		2938	2711	
		123			371			246
30	4231		0020	1684		2567	2465	
		124			370			245
49 0	4355		8,5089896	2054		2197	2220	
		123			370			245
30	4478		9773	2424		1827	1975	
		123			368			244
50 0	4601		9650	2792		1459	1731	
		122			368			243
30	4723		9528	3160		1091	1488	
		122			366			242
51 0	4845		9406	3526		0725	1246	
		122			364			242
30	4967		9284	3890		0361	1004	
		121			364			241
52 0	5088		9163	4254		8,5090997	0763	
		121			362			239
30	5209		9042	4616		9635	0524	
		120			360			239
53 0	5329		8922	4976		9275	0285	
		119			358			237
30	5448		8803	5334		8917	0048	
		119			356			236
54 0	5567		8684	5690		8561	0,0009812	
		118			355			235
30	5685		8566	6045		8206	9577	
		118			352			233
55 0	5803		8448	6397		7854	9344	

Suite de la TABLE V.

Latitude.	Rayon de courbure de la perpendiculaire. log ρ'.	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	Rayon de courbure du méridien. log ρ.	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	log $(1+e^2 \cos^2 H)$	Différence.
55° 0'	6,8055803	116	8,5088448	6,8046397	350	8,5097854	0,0009344	232
30	5919	116	8332	6747	348	7504	9112	231
56 0	6035	115	8216	7095	346	7156	8881	228
30	6150	115	8101	7441	343	6810	8653	228
57 0	6265	113	7986	7784	340	6467	8425	225
30	6378	112	7873	8124	337	6127	8200	223
58 0	6490	112	7761	8461	335	5790	7977	222
30	6602	111	7649	8796	332	5455	7755	220
59 0	6713	109	7538	9128	328	5123	7535	217
30	6822	109	7429	9456	326	4795	7318	216
60 0	6931	107	7320	9782	322	4469	7102	213
30	7038	106	7213	6,8050104	319	4147	6889	212
61 0	7144	105	7107	0423	315	3828	6677	208
30	7249	105	7002	0738	312	3513	6469	207
62 0	7354	102	6897	1050	308	3201	6262	204
30	7456	102	6795	1358	305	2893	6058	202
63 0	7558	100	6693	1663	301	2588	5856	199
30	7658	99	6593	1964	297	2287	5657	197
64 0	7757	98	6494	2261	292	1990	5460	194
30	7855		6396	2553		1698	5266	

Suite de la TABLE V.

Latitude.	Rayon de courbure de la perpendiculaire. log ρ'.	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	Rayon de courbure du méridien. log ρ.	Différ. commune	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	$\log(1+e^2\cos^2 H)$	Différence.
64°30′	6,8057855	96	8,5086369	6,8052553	289	8,5091698	0,0005266	191
65 0	7951	95	6300	2842	285	1409	5075	188
30	8046	93	6205	3127	280	1124	4887	186
66 0	8139	92	6112	3407	276	0844	4701	183
30	8231	91	6020	3683	271	0568	4518	180
67 0	8322	88	5929	3954	267	0297	4338	176
30	8410	88	5841	4221	263	0030	4162	174
68 0	8498	86	5753	4484	257	8,5089767	3988	171
30	8584	84	5667	4741	253	9510	3817	167
69 0	8668	83	5583	4994	248	9257	3650	165
30	8751	81	5500	5242	243	9009	3485	160
70 0	8832	79	5419	5485	238	8766	3325	158
30	8911	78	5340	5723	233	8528	3167	154
71 0	8989	76	5262	5956	228	8295	3013	151
30	9065	74	5186	6184	223	8067	2862	148
72 0	9139	73	5112	6407	217	7844	2714	144
30	9212	70	5039	6624	212	7627	2570	140
73 0	9282	69	4969	6836	207	7415	2430	137
30	9351	67	4900	7043	201	7208	2293	133
74 0	9418		4833	7244		7007	2160	

Suite de la TABLE V.

Latitude.	Rayon de courbure de la perpendiculaire. log ρ'.	Différ. communes	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	Rayon de courbure du méridien. log ρ.	Différ. communes	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	log$(1+e^2\cos^2 H)$	Différence.
74° 0'	6,8059418		8,5084835	6,8057244		8,5087007	0,0002160	
		65			196			130
30	9483		4768	7440		6811	2030	
		64			190			126
75 0	9547		4704	7630		6621	1904	
		61			184			122
30	9608		4643	7814		6437	1782	
		60			179			118
76 0	9668		4583	7993		6258	1664	
		57			173			115
30	9725		4526	8166		6085	1549	
		56			167			111
77 0	9781		4470	8333		5918	1438	
		54			161			106
30	9835		4416	8494		5757	1332	
		52			155			103
78 0	9887		4364	8649		5602	1229	
		49			150			99
30	9936		4315	8799		5452	1130	
		48			143			95
79 0	9984		4267	8942		5309	1035	
		46			137			91
30	6,8060030		4221	9079		5172	0944	
		43			131			87
80 0	0073		4178	9210		5041	0857	
		42			125			83
30	0115		4136	9335		4916	0774	
		39			119			78
81 0	0154		4097	9454		4797	0696	
		38			113			75
30	0192		4059	9567		4684	0621	
		36			106			70
82 0	0228		4023	9673		4578	0551	
		33			100			67
30	0261		3990	9773		4478	0484	
		31			94			62
83 0	0292		3959	9867		4384	0422	
		30			87			58
30	0322		3929	9954		4297	0364	

SUITE DE LA TABLE V.

LATITUDE.	RAYON DE COURBURE de la PERPENDICULAIRE. log ρ'.	DIFFÉR. commune	log $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$	RAYON DE COURBURE du MÉRIDIEN. log ρ.	DIFFÉR. commune	log $\frac{1}{\rho \sin 1''}$	log$(1+e^2\cos^2 H)$	DIFFÉRENCE.
83°30'	6,8060322	26	8,5083929	6,8059954	82	8,5084297	0,0000364	53
84 0	0348	26	3903	6,8060036	74	4215	0311	50
30	0374	22	3877	0110	69	4141	0261	45
85 0	0396	21	3855	0179	61	4072	0216	41
30	0417	18	3834	0240	56	4011	0175	37
86 0	0435	17	3816	0296	49	3955	0138	32
30	0452	14	3799	0345	42	3906	0106	28
87 0	0466	12	3785	0387	36	3864	0078	24
30	0478	10	3773	0423	29	3828	0054	19
88 0	0488	7	3763	0452	23	3799	0035	16
30	0495	6	3756	0475	17	3776	0019	10
89 0	0501	3	3750	0492	9	3759	0009	7
30	0504	1	3747	0501	4	3750	0002	2
90 0	0505		3746	0505		3746	0000	

NOTA. Si les longueurs des côtés des triangles d'un canevas géodésique avaient été exprimées en toises ainsi que les distances de leurs sommets à la méridienne et à la perpendiculaire de l'un d'eux, il faudrait, pour faire usage, dans ce cas, des formules de la table V, ajouter aux logarithmes de ρ et ρ' le nombre constant 9,7101801, afin d'avoir les logarithmes de ces rayons de courbure exprimés en toises, et retrancher ce même nombre des logarithmes de $\frac{1}{\rho \sin 1''}$, $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$.

TABLE VI.

POUR LE CALCUL DES LATITUDES CROISSANTES (ART. 233).

Aplatissement $= \frac{1}{334}$. $h = \frac{10800'}{\pi M} \log \text{tang}\left(45° + \frac{H}{2}\right) - \frac{10800'}{\pi}\left(e^2 \sin H + \frac{e^4 \sin^3 H}{3}\right)$.

LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.
0° 0'	0'00	29'81	9° 0'	538'89	30'21	18° 0'	1091'61	31'41
30	29,81	29,82	30	569,10	30,25	30	1123,02	31'50
1 0	59,63	29,82	10 0	599,35	30,31	19 0	1154,52	31,60
30	89,45	29,83	30	629,66	30,35	30	1186,12	31,70
2 0	119,28	29,84	11 0	660,01	30,40	20 0	1217,82	31,80
30	149,12	29,84	30	690,41	30,46	30	1249,62	31,91
3 0	178,96	29,87	12 0	720,87	30,52	21 0	1281,53	32,01
30	208,83	29,87	30	751,39	30,58	30	1313,54	32,13
4 0	238,70	29,90	13 0	781,97	30,63	22 0	1345,67	32,24
30	268,60	29,92	30	812,60	30,71	30	1377,91	32,36
5 0	298,52	29,94	14 0	843,31	30,78	23 0	1410,27	32,48
30	328,46	29,96	30	874,09	30,83	30	1442,75	32,61
6 0	358,42	30,00	15 0	904,92	30,92	24 0	1475,36	32,73
30	388,42	30,02	30	935,84	30,99	30	1508,09	32,86
7 0	418,44	30,06	16 0	966,83	31,07	25 0	1540,95	33,00
30	448,50	30,09	30	997,90	31,15	30	1573,95	33,14
8 0	478,59	30,13	17 0	1029,05	31,23	26 0	1607,09	33,29
30	508,72	30,17	30	1060,28	31,33	30	1640,38	33,43
9 0	538,89		18 0	1091,61		27 0	1673,81	

Suite de la TABLE VI.

Latitudes.	Latitudes croissantes.	Différence.	Latitudes.	Latitudes croissantes.	Différence.	Latitudes.	Latitudes croissantes.	Différence.
27° 0'	1673'81		30° 0'	1877'67		33° 0'	2087'87	
		11'17			11'51			11'88
10	1684,98		10	1889,18		10	2099,75	
		11,19			11,52			11,91
20	1696,17		20	1900,70		20	2111,66	
		11,21			11,54			11,93
30	1707,38		30	1912,24		30	2123,59	
		11,23			11,56			11,95
40	1718,61		40	1923,80		40	2135,54	
		11,25			11,58			11,98
50	1729,86		50	1935,38		50	2147,52	
		11,26			11,60			12,00
28 0	1741,12		31 0'	1946,98		34 0	2159,52	
		11,28			11,63			12,02
10	1752,40		10	1958,61		10	2171,54	
		11,30			11,65			12,04
20	1763,70		20	1970,26		20	2183,58	
		11,31			11,67			12,07
30	1775,01		30	1981,93		30	2195,65	
		11,33			11,68			12,10
40	1786,34		40	1993,61		40	2207,75	
		11,35			11,70			12,12
50	1797,69		50	2005,31		50	2219,87	
		11,37			11,73			12,14
29 0	1809,06		32 0	2017,04		35 0	2232,01	
		11,39			11,75			12,17
10	1820,45		10	2028,79		10	2244,18	
		11,41			11,77			12,20
20	1831,86		20	2040,56		20	2256,38	
		11,43			11,79			12,22
30	1843,29		30	2052,35		30	2268,60	
		11,44			11,82			12,24
40	1854,73		40	2064,17		40	2280,84	
		11,46			11,84			12,27
50	1866,19		50	2076,01		50	2293,11	
		11,48			11,86			12,30
30 0	1877,67		33 0	2087,87		36 0	2305,41	

SUITE DE LA TABLE VI.

LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.
36° 0'	2305'41		39° 0'	2531'46		42° 0'	2767'39	
		12'32			12'84			13'43
10	2317,75		10	2544,30		10	2780,82	
		12,33			12,86			13,46
20	2330,08		20	2557,16		20	2794,28	
		12,38			12,90			13,50
30	2342,46		30	2570,06		30	2807,78	
		12,40			12,92			13,54
40	2354,86		40	2582,98		40	2821,32	
		12,43			12,96			13,57
50	2367,29		50	2595,94		50	2834,89	
		12,46			12,99			13,61
37 0	2379,75		40 0	2608,93		43 0	2848,50	
		12,49			13,02			13,64
10	2392,24		10	2621,95		10	2862,14	
		12,51			13,06			13,68
20	2404,75		20	2635,01		20	2875,82	
		12,54			13,09			13,73
30	2417,29		30	2648,10		30	2889,55	
		12,57			13,12			13,76
40	2429,86		40	2661,22		40	2903,31	
		12,60			13,15			13,80
50	2442,46		50	2674,37		50	2917,11	
		12,63			13,19			13,83
38 0	2455,09		41 0	2687,56		44 0	2930,94	
		12,65			13,22			13,88
10	2467,74		10	2700,78		10	2944,82	
		12,68			13,25			13,92
20	2480,42		20	2714,03		20	2958,74	
		12,71			13,29			13,95
30	2493,13		30	2727,32		30	2972,69	
		12,75			13,32			14,00
40	2505,88		40	2740,64		40	2986,69	
		12,78			13,36			14,03
50	2518,66		50	2754,00		50	3000,72	
		12,80			13,39			14,08
39 0	2531,46		42 0	2767,39		45 0	3014,80	

SUITE DE LA TABLE VI.

LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.
45° 0'	3014'80	14'12	48° 0'	3275'62	14'93	51° 0'	3552'17	15'88
10	3028,92	14,16	10	3290,55	14,98	10	3568,05	15,93
20	3043,08	14,20	20	3305,53	15,02	20	3583,98	16,00
30	3057,28	14,23	30	3320,55	15,07	30	3599,98	16,05
40	3071,53	14,29	40	3335,62	15,12	40	3616,03	16,12
50	3085,82	14,33	50	3350,74	15,18	50	3632,15	16,17
46 0	3100,15	14,37	49 0	3365,92	15,23	52 0	3648,32	16,24
10	3114,52	14,42	10	3381,15	15,28	10	3664,56	16,29
20	3128,94	14,46	20	3396,43	15,33	20	3680,85	16,36
30	3143,40	14,51	30	3411,76	15,38	30	3697,21	16,42
40	3157,91	14,55	40	3427,14	15,44	40	3713,63	16,48
50	3172,46	14,60	50	3442,58	15,49	50	3730,11	16,55
47 0	3187,06	14,64	50 0	3458,07	15,55	53 0	3746,66	16,61
10	3201,70	14,69	10	3473,62	15,60	10	3763,27	16,68
20	3216,39	14,74	20	3489,22	15,65	20	3779,95	16,74
30	3231,13	14,78	30	3504,87	15,71	30	3796,69	16,81
40	3245,91	14,83	40	3520,58	15,76	40	3813,50	16,87
50	3260,74	14,88	50	3536,34	15,83	50	3830,37	16,94
48 0	3275,62		51 0	3552,17		54 0	3847,31	

SUITE DE LA TABLE VI.

LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.
54° 0'	3847'31	17'01	57° 0'	4164'66	18'37	60° 0'	4508'82	20'02
10	3864,32	17,08	10	4183,03	18,45	10	4528,84	20,12
20	3881,40	17,15	20	4201,48	18,53	20	4548,96	20,23
30	3898,55	17,22	30	4220,01	18,62	30	4569,19	20,33
40	3915,77	17,29	40	4238,63	18,71	40	4589,52	20,43
50	3933,06	17,36	50	4257,34	18,80	50	4609,95	20,54
55 0	3950,42	17,44	58 0	4276,14	18,88	61 0	4630,49	20,65
10	3967,86	17,51	10	4295,02	18,97	10	4651,14	20,76
20	3985,37	17,58	20	4313,99	19,06	20	4671,90	20,87
30	4002,95	17,66	30	4333,05	19,15	30	4692,77	20,99
40	4020,61	17,73	40	4352,20	19,23	40	4713,76	21,10
50	4038,34	17,81	50	4371,43	19,35	50	4734,86	21,21
56 0	4056,15	17,89	59 0	4390,78	19,43	62 0	4756,07	21,33
10	4074,04	17,96	10	4410,21	19,53	10	4777,40	21,45
20	4092,00	18,05	20	4429,74	19,62	20	4798,85	21,57
30	4110,05	18,12	30	4449,36	19,72	30	4820,42	21,69
40	4128,17	18,20	40	4469,08	19,82	40	4842,11	21,81
50	4146,37	18,29	50	4488,90	19,92	50	4863,92	21,93
57 0	4164,66		60 0	4508,82		63 0	4885,85	

Suite de la TABLE VI.

Latitudes.	Latitudes croissantes.	Différence.	Latitudes.	Latitudes croissantes.	Différence.	Latitudes.	Latitudes croissantes.	Différence.
63° 0'	4885'85	22'06	66° 0'	5303'94	24'64	69° 0'	5774'56	27'99
10	4907,91	22,19	10	5328,58	24,81	10	5802,55	28,20
20	4930,10	22,32	20	5353,39	24,97	20	5830,75	28,42
30	4952,42	22,45	30	5378,36	25,14	30	5859,17	28,64
40	4974,87	22,58	40	5403,50	25,31	40	5887,81	28,87
50	4997,45	22,72	50	5428,81	25,48	50	5916,68	29,10
64 0	5020,17	22,85	67 0	5454,29	25,65	70 0	5945,78	29,34
10	5043,02	22,99	10	5479,94	25,83	10	5975,12	29,57
20	5066,01	23,13	20	5505,77	26,02	20	6004,69	29,81
30	5089,14	23,27	30	5531,79	26,20	30	6034,50	30,06
40	5112,41	23,42	40	5557,99	26,39	40	6064,56	30,31
50	5135,83	23,56	50	5584,38	26,58	50	6094,87	30,57
65 0	5159,39	23,71	68 0	5610,96	26,77	71 0	6125,44	30,83
10	5183,10	23,86	10	5637,73	26,96	10	6156,27	31,09
20	5206,96	24,01	20	5664,69	27,16	20	6187,36	31,36
30	5230,97	24,17	30	5691,85	27,36	30	6218,72	31,63
40	5255,14	24,32	40	5719,21	27,57	40	6250,35	31,91
50	5279,46	24,48	50	5746,78	27,78	50	6282,26	32,20
66 0	5303,94		69 0	5774,56		72 0	6314,46	

SUITE DE LA TABLE VI.

LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.
72° 0'	6514'46	32'49	75° 0'	6949'64	38'83	78° 0'	7723'61	48'42
10	0346,95	32,78	10	6988,47	39,27	10	7772,03	49,09
20	6579,73	33,09	20	7027,74	39,70	20	7821,12	49,79
30	6412,82	33,39	30	7067,44	40,15	30	7870,91	50,51
40	6446,21	33,70	40	7107,59	40,61	40	7921,42	51,25
50	6479,91	34,02	50	7148,20	41,08	50	7972,67	52,00
73 0	6513,93	34,35	76 0	7189,28	41,56	79 0	8024,67	52,79
10	6548,28	34,68	10	7230,84	42,06	10	8077,46	53,61
20	6582,96	35,02	20	7272,90	42,57	20	8131,07	54,43
30	6617,98	35,37	30	7315,47	43,08	30	8185,50	55,30
40	6653,35	35,72	40	7358,55	43,61	40	8240,80	56,19
50	6689,07	36,08	50	7402,16	44,16	50	8296,09	57,10
74 0	6725,15	30,44	77 0	7446,32	44,73	80 0	8354,09	58,06
10	6701,59	36,82	10	7491,05	45,30	10	8412,15	59,04
20	6798,41	37,21	20	7536,35	45,89	20	8471,19	60,00
30	6835,62	37,61	30	7582,24	46,49	30	8531,25	61,11
40	6873,23	38,00	40	7628,73	47,12	40	8592,30	62,20
50	6911,23	38,41	50	7675,85	47,76	50	8654,56	63,34
75 0	6949,64		78 0	7723,61		81 0	8717,90	

Suite de la TABLE VI.

LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.	LATITUDES.	LATITUDES croissantes.	DIFFÉRENCE.
81° 0'	8717'90		84° 0'	10115'57		87° 0'	12500'71	
		64'51			97'01			196'58
10	8782,41		10	10212,58		10	12697,29	
		65,73			99,82			208,48
20	8848,14		20	10312,40		20	12905,77	
		66,99			102,78			221,94
30	8915,13		30	10415,18		30	13127,71	
		68,31			105,94			237,25
40	8983,44		40	10521,12		40	13364,96	
		69,69			109,29			254,83
50	9053,13		50	10630,41		50	13619,79	
		71,11			112,86			275,22
82 0	9124,24		85 0	10743,27		88 0	13895,01	
		72,60			116,69			299,18
10	9196,84		10	10859,96		10	14194,19	
		74,15			120,76			327,70
20	9270,99		20	10980,72		20	14521,89	
		75,77			125,16			362,25
30	9346,76		30	11105,88		30	14884,14	
		77,46			129,86			404,95
40	9424,22		40	11235,74		40	15289,09	
		79,24			134,95			459,08
50	9503,46		50	11370,69		50	15748,17	
		81,09			140,45			529,96
83 0	9584,55		86 0	11511,14		89 0	16278,13	
		83,03			146,42			626,80
10	9667,58		10	11657,56		10	16904,93	
		85,08			152,92			767,13
20	9752,66		20	11810,48		20	17672,06	
		87,22			160,02			989,00
30	9839,88		30	11970,50		30	18661,06	
		89,48			167,83			1393,90
40	9929,36		40	12138,33		40	20054,96	
		91,85			176,42			2382,87
50	10021,21		50	12314,75		50	22437,83	
		94,36			185,96			∞
84 0	10115,57		87 0	12500,71		90 0	∞	

TABLE VII.

ÉVALUATION EN MESURES MÉTRIQUES DE DIVERSES MESURES DE LONGUEUR USITÉES CHEZ CERTAINES NATIONS.

Nota. On a supposé le degré moyen du méridien égal à 111137^{m}25 (article 9).

Pays	Mesure					Mètres.
ALLEMAGNE.					Pied du Rhin.	0,314
	Mille géographique de 15 au degré				....	7409,48
	Mille grand				....	9258
	Mille petit				....	6271
ANGLETERRE.					Pied anglais.	0,305
				Yard.	3	0,915
			Brasse, ou fathom	2	6	1,829
		Mille.	....	1760	5280	1609,89
	Mille géographique de 60 au degré		....	2025	6075	1852,29
DANEMARCK.					Pied danois.	0,314
				Aune.	2	0,628
			Brasse, ou faun.	3	6	1,884
	Mille de 15 au degré		....	....	....	7409,48
	Mille		....	12000	....	7538
ESPAGNE.					Pied de Burgos.	0,283
				Vara.	3	0,848
			Brasse, ou braza.	2	6	1,696
	Lieue commune		....	....	....	6781
	Lieue judiciaire		....	....	....	4238

Suite de la TABLE VII.

France.	Brasse.	Toise.	Pied français.	Mètres.
Pied français				0,325
Toise			6	1,949
Brasse		....	5	1,624
Lieue de 2000 toises....	....	....	....	3898
Lieue de 25 au degré....	....	....	....	4445,49
Lieue de 20 au degré....	....	....	....	5556,86

Hollande.	Brasse, ou waâm.	Pied du Rhin.	Pied d'Amsterdam	Mètres.
Pied d'Amsterdam				0,283
Pied du Rhin			....	0,314
Brasse, ou waâm		6	....	1,883
Mille de 15 au degré....	....	....	....	7409,48

Russie.	Brasse, ou sagène.	Arschine.	Pied (verschok).	Pied anglo-russe.	Mètres.
Pied anglo-russe					0,305
Pied (verschok)				....	0,444
Arschine			16	....	0,711
Brasse, ou sagène		3	48	7	2,134
Werst....	500	1500	2400	....	1066,80

Suède.	Brasse, ou famnar	Aune.	Pied suédois.	Mètres.
Pied suédois				0,297
Aune			2	0,594
Brasse, ou famnar		....	6	1,781
Mille..............	....	....	....	10698

Arabie.........	Mille....................................	1964
Chine.........	Li..	577
Perse.........	Parasang................................	5565
Turquie.......	Berri......................................	1669

TABLE VIII.

RÉDUCTION DE DIVERSES MESURES HYDROGRAPHIQUES ÉTRANGÈRES EN ANCIENNES MESURES FRANÇAISES.

ANGLETERRE.				DANEMARCK.			
BRASSE anglaise, ou fathom.	BRASSE française.	PIED anglais.	PIED français.	BRASSE danoise, ou faun.	BRASSE française.	PIED danois.	PIED français.
	br. pi. po.		pi. po. li.		br. pi. po.		pi. po. li.
1	1 0 7,6	1	0 11 3,2	1	1 0 9,6	1	0 11 7,2
2	2 1 3,2	2	1 10 6,3	2	2 1 7,2	2	1 11 2,5
3	3 1 10,8	3	2 9 9,5	3	3 2 4,8	3	2 10 9,7
4	4 2 6,3	4	3 9 0,6	4	4 3 2,5	4	3 10 4,9
5	5 3 2,0	5	4 8 3,8	5	5 4 0,0	5	4 10 0,1
6	6 3 9,5	6	5 7 7,0	6	6 4 9,7	6	5 9 7,4
7	7 4 5,0	7	6 6 10,1	7	8 0 7,3	7	6 9 2,6
8	9 0 0,7	8	7 6 1,3	8	9 1 4,9	8	7 8 9,8
9	10 0 8,2	9	8 5 4,4	9	10 2 2,6	9	8 8 5,1
10	11 1 3,8	10	9 4 7,6	10	11 3 0,1	10	9 8 0,3
11	12 1 11,4	11	10 3 10,8	11	12 3 9,7	11	10 7 7,5
12	13 2 6,9	12	11 3 1,9	12	13 4 7,4	12	11 7 2,8
13	14 3 2,6	13	12 2 5,1	13	15 0 5,0	13	12 6 10,0
14	15 3 10,1	14	13 1 8,2	14	16 1 2,6	14	13 6 5,2
15	16 4 5,7	15	14 0 11,4	15	17 2 0,2	15	14 6 0,4
16	18 0 1,3	16	15 0 2,6	16	18 2 9,8	16	15 5 7,7
17	19 0 8,8	17	15 11 5,7	17	19 3 7,5	17	16 5 2,9
18	20 1 4,4	18	16 10 8,9	18	20 4 5,0	18	17 4 10,1
19	21 2 0,0	19	17 10 0,0	19	22 0 2,7	19	18 4 5,4
20	22 2 7,6	20	18 9 3,2	20	23 1 0,3	20	19 4 0,6

Suite de la TABLE VIII.

ESPAGNE.				HOLLANDE.			
Brasse espagnole, ou braza.	Brasse française.	Pied de Burgos.	Pied français.	Brasse hollandaise, ou waâm.	Brasse française.	Pied du Rhin.	Pied français.
	br. pi. po.		pi. po. li.		br. pi. po.		pi. po. li.
1	1 0 2,6	1	0 10 5,3	1	1 0 9,6	1	0 11 7,1
2	2 0 5,3	2	1 8 10,5	2	2 1 7,1	2	1 11 2,3
3	3 0 7,9	3	2 7 3,8	3	3 2 4,7	3	2 10 9,4
4	4 0 10,6	4	3 5 9,1	4	4 3 2,2	4	3 10 4,5
5	5 1 1,2	5	4 4 2,4	5	5 3 11,8	5	4 9 11,6
6	6 1 3,8	6	5 2 7,6	6	6 4 9,4	6	5 9 6,8
7	7 1 6,5	7	6 1 0,9	7	8 0 7,0	7	6 9 1,9
8	8 1 9,1	8	6 11 6,2	8	9 1 4,5	8	7 8 9,0
9	9 1 11,8	9	7 9 11,5	9	10 2 2,0	9	8 8 4,2
10	10 2 2,4	10	8 8 4,8	10	11 2 11,6	10	9 7 11,3
11	11 2 5,0	11	9 6 10,1	11	12 3 9,2	11	10 7 6,4
12	12 2 7,6	12	10 5 3,3	12	13 4 6,7	12	11 7 1,6
13	13 2 10,3	13	11 3 8,6	13	15 0 4,3	13	12 6 8,7
14	14 3 1,0	14	12 2 1,9	14	16 1 1,9	14	13 6 3,8
15	15 3 3,6	15	13 0 7,2	15	17 1 11,5	15	14 5 10,9
16	16 3 6,2	16	13 11 0,4	16	18 2 9,0	16	15 5 6,1
17	17 3 8,9	17	14 9 5,7	17	19 3 6,6	17	16 5 1,2
18	18 3 11,5	18	15 7 11,0	18	20 4 4,1	18	17 4 8,3
19	19 4 2,2	19	16 6 4,3	19	22 0 1,7	19	18 4 3,5
20	20 4 4,8	20	17 4 9,6	20	23 0 11,3	20	19 3 10,6

SUITE DE LA TABLE VIII.

RUSSIE.				SUÈDE.			
BRASSE russe, ou sagène.	BRASSE française.	PIED anglo-russe.	PIED français.	BRASSE suédoise, ou famnar.	BRASSE française.	PIED suédois.	PIED français.
	br. pi. po.		pi. po. li.		br. pi. po		pi. po. li.
1	1 1 6,8	1	0 11 3,1	1	1 0 5,8	1	0 10 11,6
2	2 3 1,6	2	1 10 6,2	2	2 0 11,5	2	1 9 11,1
3	3 4 8,4	3	2 9 9,3	3	3 1 5,3	3	2 8 10,7
4	5 1 3,3	4	3 9 0,3	4	4 1 11,2	4	3 7 10,3
5	6 2 10,1	5	4 8 3,6	5	5 2 4,9	5	4 6 9,8
6	7 4 4,9	6	5 7 6,7	6	6 2 10,7	6	5 5 9,4
7	9 0 11,7	7	6 6 9,7	7	7 3 4,5	7	6 4 9,0
8	10 2 6,5	8	7 6 0,9	8	8 3 10,3	8	7 3 8,5
9	11 4 1,4	9	8 5 4,0	9	9 4 4,1	9	8 2 8,1
10	13 0 8,2	10	9 4 7,2	10	10 4 9,8	10	9 1 7,7
11	14 2 3,0	11	10 3 10,3	11	12 0 3,6	11	10 0 7,3
12	15 3 9,8	12	11 3 1,4	12	13 0 9,4	12	10 11 6,8
13	17 0 4,6	13	12 2 4,5	13	14 1 3,2	13	11 10 6,4
14	18 1 11,5	14	13 1 7,7	14	15 1 9,0	14	12 9 6,0
15	19 3 6,2	15	14 0 10,8	15	16 2 2,8	15	13 8 5,5
16	21 0 1,1	16	15 0 1,9	16	17 2 8,5	16	14 7 5,1
17	22 1 7,9	17	15 11 4,9	17	18 3 2,3	17	15 6 4,7
18	23 3 2,7	18	16 10 8,1	18	19 3 8,1	18	16 5 4,2
19	24 4 9,5	19	17 9 11,2	19	20 4 1,9	19	17 4 3,8
20	26 1 4,4	20	18 9 2,4	20	21 4 7,7	20	18 3 3,4

TABLE DES MATIÈRES.

NOTA. On pourra, dans une première lecture, ne pas s'arrêter sur les articles précédés d'un astérisque *.

Nos des articles.		Pages.
	AVERTISSEMENT	1

CHAPITRE I.

1— 14	FORMULES DIVERSES EMPLOYÉES DANS LA GÉODÉSIE	5
1	Formules trigonométriques	5
2	Formules pour la résolution des triangles rectilignes.	8
3— 4	Formules pour la résolution des triangles sphériques.	9
5— 7	Séries trigonométriques et logarithmiques	12
6	Conversion en secondes d'un arc exprimé en parties du rayon, et réciproquement	13
7	Conversion des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires	15
8	Conversion des nouvelles mesures circulaires et linéaires en anciennes, et réciproquement	16
8	Logarithmes pour convertir le mètre en toise, la toise en mètre, le grade en degré, le degré en grade	17
9— 12	Dimension du sphéroïde terrestre dans l'hypothèse d'un aplatissement égal à $\frac{1}{309}$, et mesures diverses.	17
10	Mesures déduites de la valeur du rayon moyen de la terre	18
11	Conversion des lieues marines en arcs de grand cercle, et réciproquement	19
12	Mesures agraires	19
13— 14	Expressions analytiques des diverses surfaces et volumes	20

Nos des articles. Pages.

CHAPITRE II.

15— 32 PRINCIPES GÉNÉRAUX DE GÉODÉSIE. — CONSIDÉRATIONS SUCCINCTES SUR LE LEVÉ ET LA CONSTRUCTION DES PLANS HYDROGRAPHIQUES.................. 24
15— 17 Triangulation........................... 24
18 Topographie............................ 28
19— 32 Hydrographie............................ 32
21 Observations de la marée.................... 35
22 Niveau moyen........................... 36
23 Unité de hauteur.......................... 37
24 Détermination du niveau auquel on rapporte les sondes.............................. 39
25— 27 Réduction des sondes...................... 40
28— 32 Principes généraux pour faire des sondes......... 42

CHAPITRE III.

33— 40 DE LA MESURE DES BASES.................... 47
34 Mesure du petit intervalle qui sépare les règles..... 50
35 Base brisée............................. 52
36 Mesure de l'inclinaison des règles.............. 53
37 Mesure de la dilatation des règles............... 54
38 Réduction de la base mesurée au niveau moyen de la mer............................. 55
39 Moyen de se procurer une base en employant la hauteur de la mâture d'un navire............... 57
40 Base déduite d'observations astronomiques, ou de la vitesse de propagation du son................ 60

CHAPITRE IV.

41— 55 RECTIFICATIONS DES INSTRUMENTS EN USAGE DANS LES OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES, ET MESURE DES ANGLES AU MOYEN DU CERCLE OU DU THÉODOLITE RÉPÉTITEUR.. 66
42— 49 Mesure des angles avec le cercle répétiteur de Borda. 67
50 Évaluation en secondes des parties du grand niveau. 76

N°s des articles. Pages.

51— 55 Mesures des angles avec le théodolite répétiteur de Gambey ... 77

CHAPITRE V.

56— 66 CORRECTIONS DIVERSES QUE DOIVENT SUBIR LES ANGLES OBSERVÉS AVANT D'ÊTRE EMPLOYÉS DANS LES CALCULS. 82
57— 58 Correction relative à l'excentricité des lunettes ... 82
59— 61 Réduction des angles au centre de la station ... 84
62 Réduction de l'angle observé entre deux signaux, au centre de l'édifice sur lequel l'un d'eux est établi. 88
63 Réduction des angles à l'horizon ... 89
65— 66 *Phases des signaux ... 91

CHAPITRE VI.

67— 75 CALCULS DES CÔTÉS DES TRIANGLES QUI COMPOSENT LE CANEVAS TRIGONOMÉTRIQUE D'UNE CARTE, ET DÉTERMINATION DE LEURS SOMMETS AU MOYEN DE LEURS DISTANCES À LA MÉRIDIENNE ET À LA PERPENDICULAIRE DE L'UN DEUX ... 95
*68— 69 Excès sphérique ... 96
71— 72 Distances à la méridienne et à la perpendiculaire ... 98
73 *Transformations des coordonnées ... 100
74 Calcul d'un point par la station ... 101
75 *Calcul de la plus courte distance de deux points connus par leurs distances à la méridienne d'un lieu, et par celles des pieds de ces perpendiculaires à ce même lieu ... 104

CHAPITRE VII.

76—106 DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU ... 109
77— 80 Nivellement géodésique ... 110
78 1° Par des distances zénithales réciproques et simultanées ... 110
79 2° Au moyen d'une seule distance zénithale ... 113
80 3° Par la distance zénithale de l'horizon de la mer ... 114

N°s des articles.		Pages.
81	Moyen de déterminer les limites d'un plateau de roches ou d'un banc de sable au moyen de distances zénithales	115
82— 84	Corrections diverses que doivent subir les distances zénithales observées avant d'être employées dans les calculs	116
82— 83	1° Réduction des distances zénithales aux sommets des signaux, et mesure de la hauteur de ces sommets au-dessus de l'instrument	116
84	2° Réduction des distances zénithales au centre de la station	119
85	Distance et différence de niveau de deux points dont on a mesuré les distances zénithales	120
86	Calcul de la distance zénithale d'un point au moyen de sa distance linéaire, de sa différence de niveau, et de sa distance zénithale par rapport à un autre point	121
87	Calcul du coefficient de la réfraction	122
88	Calcul de la dépression vraie de l'horizon	123
89— 90	Calcul de la dépression apparente de l'horizon	124
91— 92	Mesure de l'étendue de l'horizon d'un lieu au moyen de la distance zénithale de l'horizon de la mer, ou en fonction de son altitude	125
93— 96	Détermination de la hauteur absolue d'un lieu par le moyen de sa distance angulaire à l'horizon de la mer, et de sa distance linéaire au point de station.	126
97— 98	Calcul de la hauteur absolue d'un lieu par le moyen de sa distance angulaire au pied d'une côte	128
99	Altitude des signaux et du sol sur lequel ils sont établis	130
100—101	Nivellement topographique	131
102—106	Nivellement barométrique	134

CHAPITRE VIII.

107—112 RECHERCHES DES LATITUDES, LONGITUDES ET AZIMUTS

N°s des articles. Pages.

GÉODÉSIQUES, D'UNE SUITE DE POINTS LIÉS ENTRE EUX PAR UNE CHAÎNE DE TRIANGLES............ 140

108—110 Calcul de ces quantités en fonctions des côtés des triangles.................................... 140

111 Convergence des méridiens....................... 147

112 Latitude et longitude d'un point en fonction de ses distances à la méridienne et à la perpendiculaire d'un lieu connu géographiquement, soit par les observations directes, soit par les formules précédentes.................................... 147

CHAPITRE IX.

113—118 EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES DIFFÉRENTES LIGNES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION, EN FONCTION DE LA LATITUDE.................................... 149

115—118 Lignes principales de l'ellipsoïde de révolution et formules diverses......................... 153

CHAPITRE X.

119—124 DÉTERMINATION DE LA DISTANCE DE DEUX POINTS AU MOYEN D'OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES. — VÉRIFICATION DES OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES........... 157

CHAPITRE XI.

125—141 NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA CONSTRUCTION DES PLANS ET DES CARTES HYDROGRAPHIQUES. — RECHERCHE DE L'ÉQUATION DE LA LOXODROMIE.............. 165

125—126 Des plans de construction.................... 165

127 Orientation d'un plan........................ 167

128—130 Tracé des méridiens et des parallèles sur un plan... 167

131—132 Construction des cartes réduites............... 170

133—135 Projection de Mercator........................ 171

136 Équation de la loxodromie sur la sphère......... 176

137 Équations d'un grand cercle et d'un parallèle au méridien sur la sphère...................... 178

N°s des articles. Pages.

160 Calcul de l'étendue de l'horizon visuel d'un point en fonction de la distance zénithale de l'horizon de la mer, ou en fonction de son altitude............ 216
161 Calcul du coefficient de la réfraction............. 217
162 Dépression vraie et dépression apparente.......... 218
163 Inclinaison du rayon visuel aboutissant au pied d'une côte qui borde l'horizon............... 219
164—166 Calcul de la hauteur d'un lieu par le moyen de sa distance angulaire à l'horizon de la mer, et de sa distance linéaire au point de station........... 219
167 Calcul d'une altitude au moyen d'observations barométriques.................................. 222
168—171 Calcul des latitudes, longitudes et azimuts géodésiques des points d'un réseau trigonométrique...
1° En fonction des côtés des triangles qui lient ces points entre eux.......................... 228
2° En fonction de leurs coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires qui passent par un point connu géographiquement..................... 230
172 Calcul des latitudes et longitudes des intersections des droites menées parallèlement à la méridienne et à la perpendiculaire, sur les plans de construction.................................. 232
173 Calcul de la distance de deux points connus par leurs latitude et leur longitude, ou mesure d'une base par des observations astronomiques............ 235
174 Calcul de la distance de deux points, connaissant la position géographique de l'un, l'azimut de l'autre sur son horizon, et la latitude de celui-ci....... 236
175 Calcul de la distance de deux points, étant donnés les coordonnées géographiques de l'un, l'azimut de l'autre sur son horizon et leur différence de longitudes................................ 238
177 Expression de la convergence des méridiens de deux points.................................. 239

Nos des articles. Pages.

178 Formules pour calculer les latitudes croissantes..... 240

179 Longueur par laquelle on doit représenter, sur une carte réduite, une minute de latitude, en fonction de celle de l'équateur exprimée en unités linéaires. 241

180 Valeur à l'échelle de la carte, du côté de chaque carré dans les plans particuliers de construction....... 241

TABLES

DESTINÉES À ABRÉGER LES OPÉRATIONS NUMÉRIQUES RELATIVES À DIVERS CALCULS GÉODÉSIQUES.

Table I. Pour les calculs d'une base au moyen de la vitesse du son. 245

II. Pour corriger la hauteur de la colonne barométrique. 247

III. Pour calculer la dépression de l'horizon et sa distance. 249

IV. Pour calculer l'altitude d'un lieu au moyen de la dépression apparente de l'horizon. 253

V. Contenant les logarithmes des rayons de courbure du méridien et de la perpendiculaire, sous toutes les latitudes. 257

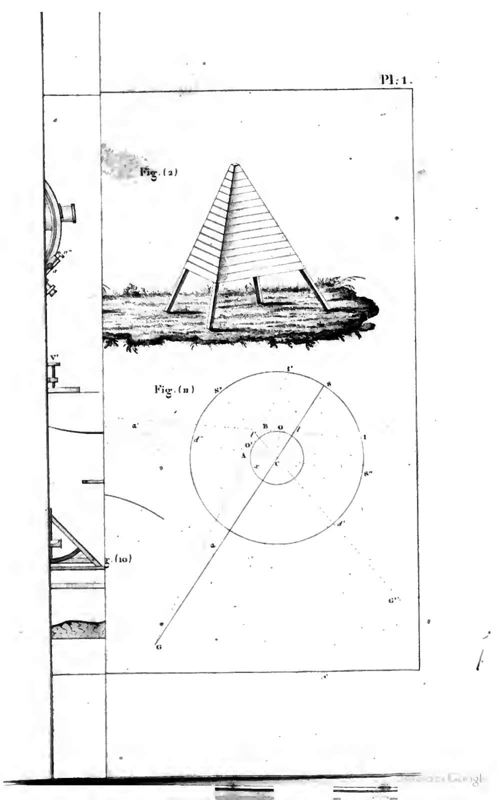
VI. Des latitudes croissantes, sur le sphéroïde terrestre, en supposant l'aplatissement égal à $\frac{1}{324}$........ 267

VII. Évaluation en mesures métriques de diverses mesures de longueur usitées chez certaines nations. 275

VIII. Réductions de diverses mesures hydrographiques étrangères en anciennes mesures françaises. ... 277

FIN DE LA TABLE.




Fig. (2)
Fig. (11)
g. (10)
V'
f'
S
S'
a'
B
O
d''
l
O'
A
C
S''
a
d'
G
G''

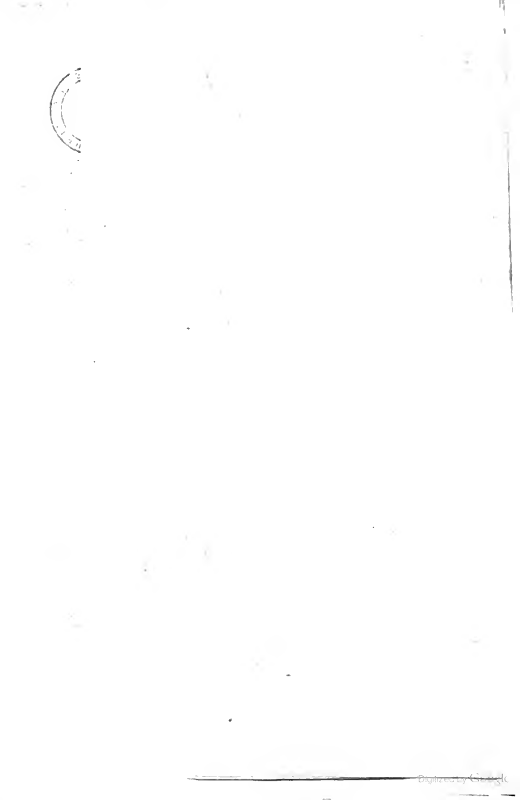
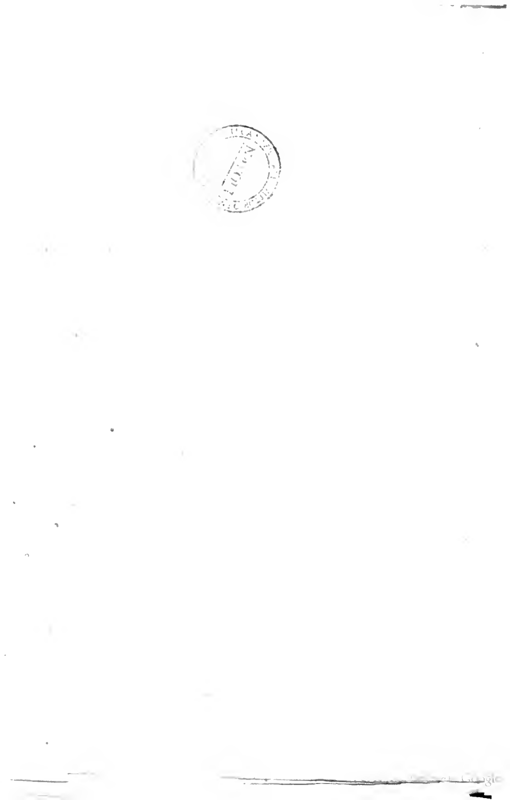




Fig. (12)

Fig. (15)

Fig. (22)



Pl. 3.

Fig. (27)

Fig. (37)

Fig

3)

ig. (38)

Fig. (39)



